

2022 级高一下学期期末校际联合考试

参考答案

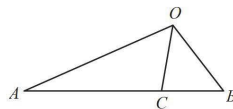
2023.07

一、单项选择题：

1. 【答案】C 【解析】 $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ = \sin(20^\circ + 40^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故选 C.

2. 【答案】D 【解析】因为 $\triangle ABC$ 中，角 A 为钝角，所以 B 为锐角，可得 $\tan B > 0$ ， $\cos A < 0$ ，所以点 $P(\tan B, \cos A)$ 在第四象限. 故选 D.

3. 【答案】B 【解析】如图，



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

故选 B

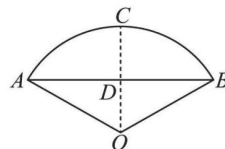
4. 【答案】C 【解析】设扇形的圆心角为 α ，由扇形面积公式可知 $\frac{1}{2} \times 2^2 \times \alpha = \frac{4\pi}{3}$ ，所以 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ，

如图，取 $\widehat{AB}$ 的中点 C ，连接 OC ，交 AB 于点 D ，则 $OC \perp AB$ ，易知

$$\angle OAD = \frac{\pi}{6}，则 OD = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1，所以 CD = 2 - 1 = 1，$$

$$AD = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}，AB = 2AD = 2\sqrt{3}，所以扇形弧长的近似值为$$

$$l_{\widehat{AB}} = \text{弦} + \frac{2 \times \text{矢}^2}{\text{径}} = AB + \frac{2CD^2}{2OA} = \frac{4\sqrt{3} + 1}{2}。 故选: C$$



5. 【答案】C 【解析】 $y = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

将 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得: $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 本题正确选项: C

6. 【答案】B 【解析】由于函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增;

$$x \in [-\frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}], \omega x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{5\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}], -\frac{5\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} \text{ 且 } \frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2},$$

解得 $\omega \leq \frac{4}{5}$ 且 $\omega \leq \frac{1}{2}$ ，所以 $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$ ；又因为 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{5\pi}{6}]$ 上只取得一次最大值，即

$x \in [0, \frac{5\pi}{6}]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}]$; 所以 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$, 解得 $\frac{2}{5} \leq \omega < \frac{14}{5}$; 综

上知, ω 的取值范围是 $[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}]$. 故选: B

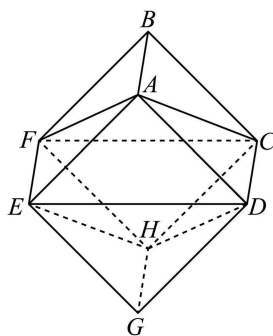
7. 【答案】C 【解析】如图, 在正方体 $ABCD-EFGH$ 中,

若要使液面形状不可能为三角形, 则平面 EHD 平行于水平面放置时, 液面必须高于平面 EHD , 且低于平面 AFC , 若满足上述条件, 则任意转动正方体, 液面形状都不可能为三角形,

设正方体内水的体积为 V , 而 $V_{G-EHD} < V < V_{\text{正方体}} - V_{B-AFC}$,

而 $V_{G-EHD} = V_{B-AFC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{6}$ (升),

$V_{\text{正方体}} - V_{B-AFC} = 1^3 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ (升), 所以 V 的取值范围是 $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$. 故答案为: C



8. 【答案】D 【解析】原图像上相邻的最高点和最低点的空间距离为

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{3}, \therefore \omega = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{6}\right),$$

方程 $f(x) = -1$ 在区间 $(0, a)$ 上有两个实根, 即 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ 有 2 个解,

由于 $\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{a\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore \frac{11\pi}{6} < \frac{a\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{19\pi}{6}$, 则 $4 < a \leq \frac{20}{3}$, 故答案为: D

二、多项选择题:

9. 【答案】AC 【详解】解: 对 A:

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 60^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\text{对 B: } \sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8} = -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

对 C: 若 $A > C$, 由大角对大边得到 $a > c$, 设 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,

由正弦定理得 $2R \sin A > 2R \sin C$, 得到 $\sin A > \sin C$, 故 C 正确.

对于 D: 若 $a \cos A = b \cos B$, 则 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$, 可得 $\sin 2A = \sin 2B$, 所以为等腰或

直角三角形.

10. 【答案】ABD 【解析】对于 A, 若 $m \perp \alpha$, 则取 α 内任意两条相交直线 a, b , 使得 $m \perp a$, $m \perp b$, 又 $m \parallel n$, 则 $n \perp a$, $n \perp b$, 由线面垂直的判定定理得 $n \perp \alpha$, 故 A 正确;

对于 B, 垂直于同一条直线的两个平面平行, 故 B 正确;

对于 C, 若 $m = AA_1$, 平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为平面 α , $m \perp \alpha$, 设平面 ADD_1A_1 为平面 β , 则 $m \subset \beta$, 故 C 错误;

对于 D, 由面面垂直的判定定理可得, 故 D 正确;

故选: ABD.

11. 【答案】ACD 【解析】 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$,

因为 $f(-x) = |\cos(-2x)| + \cos|-x| = |\cos 2x| + \cos|x| = f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数, 图像关于 y 轴对称, 故 A 正确;

因为 $y = \cos x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(x) = |\cos 2x| + \cos x$,

当 $x \in [\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 时, $f(x) = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$, 设

$\cos x = t \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$,

则 $g(t) = 2t^2 + t - 1 = 2(t + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8}$, $g(t)$ 在 $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上单调递减,

又 $y = \cos x$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 单调递减, 故 B 错误;

$f(x + \pi) = |\cos(2x + 2\pi)| + \cos(x + \pi) = |\cos 2x| - \cos x \neq f(x)$, 故 C 正确;

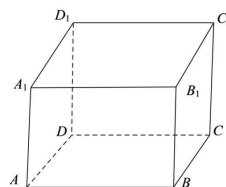
当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 时, $f(x) = -\cos 2x + \cos x = -2\cos^2 x + \cos x + 1$,

设 $\cos x = t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, 则 $h(t) = -2t^2 + t + 1 = -2(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}$,

因为 $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, 所以 $h(t) \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{8}]$, 故 D 正确;

故选: ACD.

12. 【答案】ACD 【解析】对于 A, 连接 AC , 在 $\triangle ACD$ 中, $\cos D = \frac{16+16-AC^2}{32}$,



$\cos B = \frac{4+36-AC^2}{24}$, 由于 $B+D=\pi$, 所以 $\cos B + \cos D = 0$, 故 $\frac{32-AC^2}{32} + \frac{40-AC^2}{24} = 0$,

解得 $AC^2 = \frac{256}{7}$, 所以 $\cos D = -\frac{1}{7}$, $\cos B = \frac{1}{7}$, 所以 $\sin B = \sin D = \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{24\sqrt{3}}{7}$,

$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \sin D = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{32\sqrt{3}}{7}$,

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{24\sqrt{3}}{7} + \frac{32\sqrt{3}}{7} = 8\sqrt{3}$, 故 A 正确;

对于 B, 设外接圆半径为 R , 则 $2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{\sqrt{\frac{256}{7}}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$,

故该外接圆的直径为 $\frac{4\sqrt{21}}{3}$, 故 B 错误;

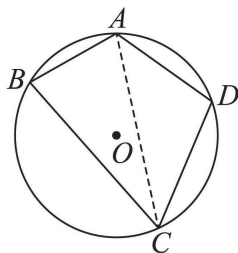
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BD}$$

对于 C, $= \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$$= -\frac{1}{2} |\overrightarrow{CD}|^2 + \frac{1}{2} |\overrightarrow{CB}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = 16$$

对于 D, 由选项 A 同理可求 $BD = 2\sqrt{7}$, 在 $\triangle BCD$ 中由余弦定理可知:

$C = \frac{\pi}{3}$, 故 $CF = \frac{1}{3} CB$, 所以 $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DO} \cdot (\frac{1}{3} \overrightarrow{DB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC}) = 10$, 故选: ACD



三、填空题:

13. 【答案】 $\frac{1}{2}$ 【解析】 因为 $a \perp b$, 所以 $a \cdot b = -1 + 2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$. 故答案为: $\frac{1}{2}$.

14. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 【解析】 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

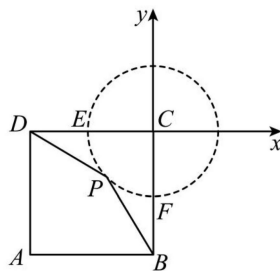
15. 【答案】 $1+2\sqrt{2}$ 【解析】 如图, 以点 C 为坐标原点建立平面直角坐标系,

则 $B(0, -2), D(-2, 0)$, 设 $P(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in R$,

则 $\overrightarrow{DP} = (\cos \theta + 2, \sin \theta), \overrightarrow{BP} = (\cos \theta, \sin \theta + 2)$,

则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = \cos \theta (\cos \theta + 2) + \sin \theta (\sin \theta + 2) = 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$,

由 $\theta \in R$, 得 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 的最大值为 $1 + 2\sqrt{2}$.



16. 【答案】 $\left[\frac{25}{4}\pi, \frac{65}{4}\pi\right]$ 【解析】由题意, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, BC=2, \angle ABC=60^\circ$,

由余弦定理得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC} = \sqrt{3}$,

所以 $AB^2 + AC^2 = BC^2$, 由勾股定理逆定理得: $AB \perp AC$,

取 A_1D_1 、 B_1C_1 、 BC 的中点分别为 M 、 N 、 E , 则 $A_1C_1 \perp C_1D_1$, $A_1N \perp ND_1$,

又 $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} = 0$, 故点 Q 在平面 $ABCD$ 的轨迹为以 BC 为直径的圆, 记为 $\odot E$.

$\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PD_1} = 0$, 故点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的轨迹为以 A_1D_1 为直径的圆, 记为 $\odot M$,

则 $\odot M$ 经过点 N , 且三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球球心 O 在直线 EN 上.

设 $OE = x$, $NP = y$, 球的半径为 R ,

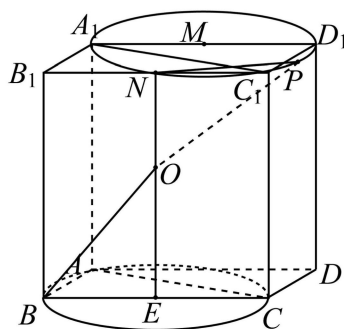
则在 $Rt\triangle OEB$ 中, $R^2 = BE^2 + OE^2 = 1^2 + x^2$,

在 $Rt\triangle ONP$ 中, 则 $R^2 = ON^2 + NP^2 = (2-x)^2 + y^2$, 则

$y^2 = 4x - 3$, 由 $y^2 \in [0, 4]$ 知 $x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$,

则 $R^2 = x^2 + 1, \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}$, 所以 $R^2 \in \left[\frac{25}{16}, \frac{65}{16}\right]$.

故三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 \in \left[\frac{25}{4}\pi, \frac{65}{4}\pi\right]$.



四、解答题:

17. 解: (1) 由 $\cos C = \frac{1}{8}$, 且 $0 < C < \pi$, 则 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, -----2 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{15\sqrt{7}}{4}$. -----5 分

高一数学试题 第5页 (共10页)

(2) 由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 16 + 25 - 5 = 36$, 则 $c = 6$, -----7 分

而 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, 则 $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. -----10 分

18. (1) 证明: 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 OE ,

$\because$ 底面 $ABCD$ 为正方形, $\therefore O$ 为 BD 中点,

$\because$ 点 E 是 PD 的中点, $\therefore OE \parallel PB$, -----3 分

$\because OE \subset$ 平面 ACE , $PB \not\subset$ 平面 ACE ,

$\therefore PB \parallel$ 平面 ACE .

-----5 分

(2) 解: 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$, 又四边形 $ABCD$ 为正方形,

所以 $CD \perp AD$, 又 $PA \cap AD = A$, $PA, AD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp PD$, -----6 分

又点 E 是 PD 的中点, $PA = 2\sqrt{3}$, $AB = 2$, 所以 $S_{\triangle PAE} = \frac{1}{2} S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$,

$AE = \frac{1}{2} PD = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + AP^2} = 2$,

$CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{7}$, -----8 分

设点 P 到平面 AEC 的距离为 d , 则 $V_{P-AEC} = V_{C-AEP}$, 即 $\frac{1}{3} S_{\triangle AEC} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle AEP} \cdot CD$,

-----10 分

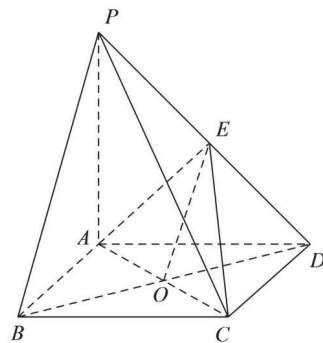
即 $\frac{1}{3} \times \sqrt{7} \cdot d = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2$, 解得 $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$,

即点 P 到平面 AEC 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. -----12 分

19. 解: (1) 因为 $S = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos B$,

又 $S = \frac{1}{2} a \sin B$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos B = \frac{1}{2} a \sin B$, 即 $\tan B = \sqrt{3}$ -----3 分

高一数学试题 第6页 (共10页)



$$\because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意得, } a=2c, b=\sqrt{3}, B=\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \text{由余弦定理 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{ 得 } 4c^2 + c^2 - 4c^2 \cos \frac{\pi}{3} = 3, \text{ 即 } c=1 \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{设边 } BC \text{ 与 } x \text{ 轴的交点为 } D, \text{ 则 } \triangle ABD \text{ 为正三角形, } \therefore \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 且 } AD=1,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } 2, \therefore \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\pi x + \varphi)$$

$$\text{又点 } B\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 在函数 } f(x) \text{ 的图象上, } \therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. \text{ 解: (1) 函数 } f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 满足的条件为 } \textcircled{1}\textcircled{3};$$

理由如下: 由题意可知②函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 条件①②互相矛盾,

故③为函数 $f(x)$ 满足的条件之一, 由③可知, $T = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 故②不合题意,

所以函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 满足的条件为①③;

由①可知 $A=2$, 所以 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; -----3 分

因为 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$

高一数学试题 第 7 页 (共 10 页)

所以 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [\frac{1}{2}, 1]$

所以 $f(x)$ 的值域为 $[1, 2]$ -----6 分

(2) 因为 $f(x) + 1 = 0$, 所以 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$,

所以 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, -----9 分

又因为 $x \in [-\pi, \pi]$, 所以 x 的取值为 $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,

所以方程 $f(x) + 1 = 0$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上所有的解的和为 $\frac{2\pi}{3}$. -----12 分

21. 解: (1) $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理: $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \times \cos A = 12$,

所以 $BD = 2\sqrt{3}$, 则 $AD^2 + BD^2 = AB^2$, $AD \perp BD$, -----2 分

又 $AD = PD$, $AB = PB$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle PBD$, 所以 $PD \perp BD$, -----4 分

又 $AD \cap PD = D$, $PD, AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $BD \perp$ 平面 PAD , -----5 分

又 $BD \subset$ 平面 BCD ,

所以平面 $BCD \perp$ 平面 PAD ; -----6 分

(2) 如图, 取 PA 中点 E , 连接 BE, DE , 因为 $AB = PB, AD = PD$,

则 $BE \perp PA, DE \perp PA$,

所以 $\angle BED$ 为二面角 $D-PA-B$ 的平面角,

且由 (1) 知, 平面 $BD \perp$ 平面 PAD ,

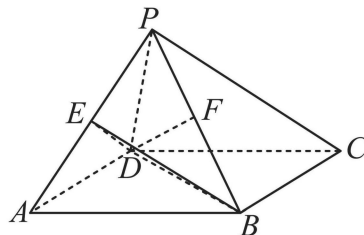
所以 $\cos \angle BED = \frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow ED = \sqrt{2}$, -----8 分

$\triangle PDA$ 中, $PD = AD = 2$, PA 中垂线 $DE = \sqrt{2}$,

所以由勾股定理可得 $AE = \sqrt{2}, PA = 2\sqrt{2}$,

$PD^2 + AD^2 = PA^2$, 所以 $PD \perp AD$, 又 $BD \perp AD, PD \cap BD = D$

所以 $AD \perp$ 平面 PBD , 又 $BC \parallel AD$, 所以 $BC \perp$ 平面 PBD ,



过 D 作 $DF \perp PB$ 于点 F , 因为 $DF \subset$ 平面 PBD , 所以 $BC \perp DF$,
因为 $BC \cap PB = B$, 所以 $DF \perp$ 面 PBC , 所以直线 BD 与平面 PBC 夹角即为
 $\angle PBD$.-----11 分

$$Rt\triangle PBD \text{ 中, } \sin \angle PBD = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

所以直线 BD 与平面 PBC 夹角的正弦值为 $\frac{1}{2}$.-----12 分

22. 解: (1) 该烟花由半球, 圆台, 圆锥三部分组成,

$$\text{又 } V_{\text{半球}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{16\pi}{3}, \quad V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} \pi h (r_{\text{上}}^2 + r_{\text{上}} r_{\text{下}} + r_{\text{下}}^2) = \frac{7\pi}{3}, \quad V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} h S = \frac{7\pi}{6},$$

$$\text{所以该烟花的体积 } V = \frac{16\pi}{3} + \frac{7\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{53\pi}{6}; \quad \text{-----3 分}$$

$$(2) \text{ ①由图可知: } PM = NQ = 2 \cos \theta, PC = 2 \sin \theta,$$

在梯形 $BCEF$ 中, 由 $CE = 2, BF = BC = 1$, 易知 $\angle CEF = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{故 } CQ = 2 - 2 \cos \theta, \quad \text{-----5 分}$$

$$\text{则 } PQ = CP + CQ = 2 + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta,$$

$$\text{所以 } V = \pi |MP|^2 \cdot |PQ| = 8\pi \cos^2 \theta (1 + \sin \theta - \cos \theta); \quad \text{-----7 分}$$

$$\text{②由上问可知: } t = \frac{V}{(9 - 7 \cos \theta) \cos^2 \theta} = \frac{8\pi(1 + \sin \theta - \cos \theta)}{9 - 7 \cos \theta}$$

$$\text{即 } t = \frac{8\pi \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)}{2 + 7(1 - \cos \theta)} = \frac{8\pi \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)}{2 + 14 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{8\pi \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)}{8 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{8\pi \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right)}{8 \tan^2 \frac{\theta}{2} + 1}, \quad \text{-----9 分}$$

$$\text{令 } m = \tan \frac{\theta}{2}, \text{ 则 } 0 < m \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{上式即为 } t = \frac{8\pi(m^2 + m)}{8m^2 + 1} = \frac{\pi(8m^2 + 1 + 8m - 1)}{8m^2 + 1} = \pi \left(1 + \frac{8m - 1}{8m^2 + 1} \right),$$

又令 $n = 8m - 1, n \in (-1, \frac{8\sqrt{3}}{3} - 1]$, 则 $m = \frac{n+1}{8}$,

当 $n = 0$ 时, $t = \pi$,

当 $-1 < n < 0$ 时, $t < \pi$,

当 $n > 0$ 时,

$$t = \pi \left[1 + \frac{n}{8 \left(\frac{n+1}{8} \right)^2 + 1} \right] = \pi \left(1 + \frac{8n}{n^2 + 2n + 9} \right) = \pi \left(1 + \frac{8}{n + \frac{9}{n} + 2} \right) \leq \pi \left(1 + \frac{8}{2\sqrt{9} + 2} \right) = 2\pi$$

当且仅当 $n = \frac{9}{n}$, 即 $n = 3$, 即 $m = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 满足题意.

该烟花燃烧的最长时间为 2π .

-----12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线