

秘密★启用前

2023 届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一） 数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{x \mid 6x^2 + 7x - 3 \leq 0\}$ ， $B = \mathbf{Z}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 关于函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称性，下列说法正确的是
A. 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称 B. 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
C. 关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称 D. 关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
3. 已知按从小到大顺序排列的两组数据：
甲组：27, 30, 37, m , 40, 50；
乙组：24, n , 33, 44, 48, 52.
若这两组数据的第 30 百分位数、第 50 百分位数都分别对应相等，则 $\frac{m}{n}$ 等于
A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{10}{7}$ C. $\frac{12}{7}$ D. $\frac{7}{4}$
4. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2^x}{2^x + 1}$ ， $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a = \frac{1}{2}$ ”是“函数 $f(x)$ 为奇函数”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 若 M 是圆 $C: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上任一点，则点 M 到直线 $y = kx - 2$ 的距离的值不可能等于
A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{6} + 1$ D. 8
6. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，点 M 是过坐标原点 O 且倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线 C 的一个交点，且 $|\overrightarrow{MF_1} + \overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MF_1} - \overrightarrow{MF_2}|$ ，则双曲线 C 的离心率为
A. 2 B. $2 + \sqrt{3}$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\sqrt{3}$

数学·第 1 页（共 4 页）

7. 中国空间站 (China Space Station) 的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱. 2022 年 10 月 31 日 15:37 分, 我国将“梦天实验舱”成功送上太空, 完成了最后一个关键部分的发射, “梦天实验舱”也和“天和核心舱”按照计划成功对接, 成为“T”字形架构, 我国成功将中国空间站建设完毕. 2023 年, 中国空间站将正式进入运营阶段. 假设中国空间站要安排甲、乙、丙等 5 名航天员进舱开展实验, 其中“天和核心舱”安排 2 人, “问天实验舱”安排 2 人, “梦天实验舱”安排 1 人. 若甲、乙两人不能同时在一个舱内做实验, 则不同的安排方案共有

A. 9 种 B. 24 种 C. 26 种 D. 30 种

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_2=6$, 且 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$, 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (例如 $[1.6]=1$, $[-1.6]=-2$), 则 $\left[\frac{2^2}{a_1}\right] + \left[\frac{3^2}{a_2}\right] + \cdots + \left[\frac{2022^2}{a_{2021}}\right] =$

A. 2019 B. 2020
C. 2021 D. 2022

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知复数 $z = \frac{2}{1+i}$, 其中 i 为虚数单位, 则

A. $|z|=2$ B. $z^2=-2i$
C. z 的共轭复数为 $1+i$ D. z 的虚部为 1

10. 折扇是我国古老文化的延续, 在我国已有四千年左右的历史, “扇”与“善”谐音, 折扇也寓意“善良”“善行”. 它常以字画的形式体现我国的传统文化, 也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征 (如图 1 甲). 图乙是一个圆台的侧面展开图 (扇形的一部分), 若两个圆弧 $\widehat{DE}$, $\widehat{AC}$ 所在圆的半径分别是 3 和 6, 且 $\angle ABC=120^\circ$, 则该圆台的

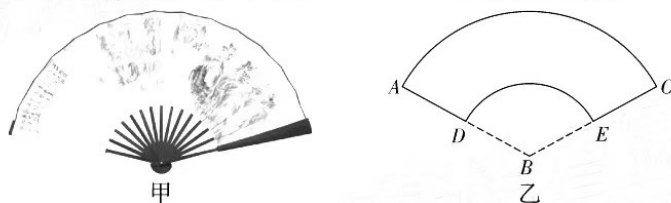


图 1

- A. 高为 $2\sqrt{2}$ B. 体积为 $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$
C. 表面积为 14π D. 内切球的半径为 $\sqrt{2}$
11. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的三边分别为 a, b, c , $c=2b$, 下列说法正确的是
- A. 若 $B=\frac{\pi}{6}$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形
- B. 若 $a=\sqrt{7}b$, 则 $A=\frac{2\pi}{3}$
- C. 若 $a=2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积有最大值 $\frac{5}{3}$
- D. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 则 BC 的最小值是 $\sqrt{6}$

12. 数学家华罗庚曾说：“数缺形时少直观，形少数时难入微。”事实上，很多代数问题可以转化为几何问题加以解决。例如，与 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 相关的代数问题，可以转化为点 $A(x, y)$ 与点 $B(a, b)$ 之间的距离的几何问题。结合上述观点，下列结论正确的是

- A. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2+4x+8} - \sqrt{x^2-4x+8}$ 有 1 个零点
B. 函数 $g(x) = \sqrt{x^2+4x+8} - \sqrt{x^2-4x+8} - 2$ 有 2 个零点
C. 函数 $h(x) = \sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2-4x+8}$ 有最小值 $4\sqrt{2}$
D. 关于 x 的方程 $\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2-4x+8} = 6$ 的解为 $x = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若函数 $f(x) = a \ln x + bx$ 在 $x=1$ 处取得极值 3，则 $b-a =$ _____.

14. 若 $\left(ax^2 - \frac{b}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 项的系数为 -160，则 a^2+b^2 的最小值为 _____.

15. 设抛物线 $C: x^2 = 2py (p>0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A 为 C 上一点，以 F 为圆心， $|FA|$ 为半径的圆交 l 于 M, N 两点。若 $\angle FMN = 60^\circ$ ，且 $\triangle AMN$ 的面积为 12，则 $p =$ _____.

16. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，且该四棱锥的所有顶点都在球 O 的球面上， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA=AB=\sqrt{2}$ ， $BC=2$ ，点 E 在棱 PB 上，且 $\vec{EB} = 2\vec{PE}$ ，过 E 作球 O 的截面，则所得截面面积的最小值是 _____.

四、解答题（共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x) = \cos x(2\sqrt{3}\sin x + \cos x) - \sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间和最小正周期；

(2) 若当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的不等式 $f(x) \geq m$ _____，求实数 m 的取值范围.

请选择①恒成立，②有解，两条件中的一个，补全问题 (2)，并求解.

注意：如果选择①和②两个条件解答，以解答过程中书写在前面的情况计分.

18. （本小题满分 12 分）

已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，4 是 a_1, a_4 的等比中项，且 $S_6 - 3S_4 = 12$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{S_n+n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，试比较 T_n 与 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的大小，并说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

如图 2, C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A, B 的点, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $PA=PC=AC=2$, $BC=4$, E, F 分别是 PC, PB 的中点, 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为直线 l .

(1) 证明: $l \perp$ 平面 PAC ;

(2) 直线 l 上是否存在点 Q , 使得直线 PQ 与平面 AEF 所成的角的正弦

值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$? 若存在, 求出 $|AQ|$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

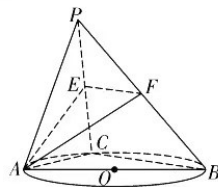


图 2

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 F 在直线 $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ 上, 过点 F 与 x 轴垂直的直线与椭圆 E 相交于 P, H 两点, $|PH| = 1$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过点 $N(1, 0)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 C, D 两点, 试探究是否存在定点 Q , 使得 $\overrightarrow{QC}^2 + \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{CD}$ 为定值? 若存在, 求出该定值; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

2022 年 10 月 1 日, 女篮世界杯落幕, 时隔 28 年, 中国队再次获得亚军, 追平历史最佳成绩. 为考察某队员甲对球队的贡献, 教练对近两年甲参加过的 100 场比赛进行统计: 甲在前锋位置出场 20 次, 其中球队获胜 14 次; 中锋位置出场 30 次, 其中球队获胜 21 次; 后卫位置出场 50 次, 其中球队获胜 40 次. 用该样本的频率估计概率, 则:

(1) 甲参加比赛时, 求该球队某场比赛获胜的概率;

(2) 现有小组赛制如下: 小组共 6 支球队, 进行单循环比赛, 即任意两支队伍均有比赛, 规定至少 3 场获胜才可晋级. 教练决定每场比赛均派甲上场, 已知甲所在球队顺利晋级, 记其获胜的场数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = x^2 + ax - \frac{1}{e^x}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \geq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线