

# 2024 届高三入学摸底考试

## 数 学

本试卷共 4 页。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

### 注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{0, 1, 2\}$                       B.  $\{-1, 0, 1\}$                       C.  $\{-1, 0, 1, 2\}$                       D.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
2. 若复数  $z$  满足  $(z+1)(1-i) = 1-i$ , 则在复平面内,  $z$  对应的点位于  
 A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限
3. 已知圆台的上、下底面圆半径分别为 1 和 2, 圆台的高为 3, 则圆台的体积为  
 A.  $21\pi$                       B.  $15\pi$                       C.  $7\pi$                       D.  $5\pi$
4. 若圆心在第一象限的圆过点  $(2, 0)$ , 且与两坐标轴都相切, 则圆心到直线  $2x + y - 11 = 0$  的距离为  
 A. 1                      B.  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$                       C. 2                      D.  $\sqrt{5}$
5. 已知函数  $f(x) = |\ln x|$ . 若  $0 < a < b$ , 且  $f(a) = f(b)$ , 则  $a + 2b$  的取值范围为  
 A.  $[2\sqrt{2}, +\infty)$                       B.  $[3, +\infty)$                       C.  $(2\sqrt{2}, +\infty)$                       D.  $(3, +\infty)$
6. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 图象的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{3}$ , 且关于点  $(\frac{5\pi}{18}, 0)$  对称, 则  $\varphi$  的值为  
 A.  $\frac{\pi}{12}$                       B.  $\frac{\pi}{6}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{3}$
7. 甲、乙两位游客慕名来到张家界旅游, 准备从天门山、十里画廊、袁家界、大峡谷 4 个景点中随机选择其中一个, 在甲、乙两位游客选择的景点不同的条件下, 恰好有一名游客选择大峡谷景点的概率为  
 A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{3}{4}$

8. 已知函数  $f(x) = x(a - 2e^{2x})$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ , 则 " $-\frac{3}{e^2} < a < 0$ " 是 "函数  $f(x)$  有两个极值点" 的

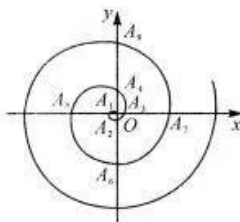
- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不充分也不必要条件

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是

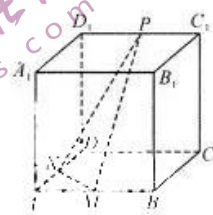
- A. 在频率分布直方图中, 各小长方形的面积等于各组的频数  
B. 数据 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 16 的第 75 百分位数为 10  
C. 在残差图中, 若样本数据对应的点分布的带状区域越狭窄, 说明该模型的拟合精度越高  
D. 若随机变量  $\xi \sim N(2, \sigma^2)$ ,  $P(\xi < 4) = 0.84$ , 则  $P(2 < \xi < 4) = 0.34$

10. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 阿基米德螺线与坐标轴依次交于点  $A_1(-1, 0), A_2(0, -2), A_3(3, 0), A_4(0, 4), A_5(-5, 0), \dots$ , 则下列结论正确的是



- A. 点  $A_6$  的坐标为  $(0, -36)$   
B.  $\triangle OA_7A_8$  的面积为 56  
C.  $2^n |OA_{n+1}| = |OA_n| + |OA_{n+2}|$  (其中  $n \in \mathbf{N}^*$ )  
D. 若  $\triangle A_{11}A_{12}A_{13}$  的面积为 169, 则  $n$  的值为 12

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M, N$  分别是  $AB, AD$  的中点,  $P$  为线段  $C_1D_1$  上的动点 (含端点), 以正方体中心  $O$  为球心的球与正方体的每条棱有且只有一个公共点, 则下列结论正确的是



- A. 球  $O$  的表面积为  $2\pi$   
B. 球  $O$  在正方体外部的体积小于  $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi - 1$   
C. 存在点  $P$ , 使得  $MN \perp NP$   
D. 直线  $NP$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值的最小值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F(1, 0)$ ,  $P$  是抛物线  $C$  上位于第一象限内的点, 过点  $P$  且斜率为  $\frac{3}{4}$  的直线交抛物线  $C$  的准线  $l$  于点  $Q$ , 点  $P$  在准线  $l$  上的射影为点  $R$ . 若  $\angle PQR = \angle PQF$ , 则下列结论正确的是

- A. 抛物线  $C$  的标准方程为  $y^2 = 4x$   
B.  $\angle PFQ = 90^\circ$   
C.  $|PF| = \frac{16}{9}$   
D. 四边形  $FPRQ$  的面积为  $\frac{625}{108}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若向量  $a, b$  满足  $|a| = 2|b| = 2, |a + 2b| = 2\sqrt{3}$ , 则向量  $a$  与  $b$  的夹角为 \_\_\_\_\_.

14. 已知  $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ , 则  $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  的值为 \_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x+1)$  是奇函数,  $f(x+3) = f(1-x), f(0) = -2$ , 则  $\sum_{k=1}^{2023} f(k) =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 左、右顶点分别为  $A_1, A_2$ , 以  $F_1F_2$  为直径的圆与双曲线  $C$  的一条渐近线交于点  $P$ , 且  $\angle PA_1A_2 = 45^\circ$ , 则双曲线  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列,且  $2a_{n+1} = a_n + n + 3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = 2^n$ , 证明: 数列  $\{b_n\}$  是等比数列, 并求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sqrt{3} \sin A = \sqrt{3} \sin B \cos C - \sin B \sin C$ .

(1) 求角  $B$  的大小;

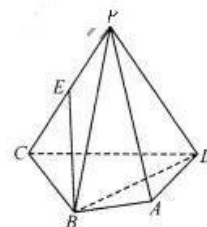
(2) 若  $B$  的角平分线交  $AC$  于点  $D$ , 且  $BD = 2$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最小值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $AB = AD = 2$ ,  $E$  为  $PC$  的中点.

(1) 求证:  $BE \parallel$  平面  $PAD$ ;

(2) 若  $PC = PD = 2\sqrt{3}$ , 平面  $PCD \perp$  平面  $ABCD$ , 求二面角  $B-CP-D$  的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

某人准备应聘甲、乙两家公司的高级工程师,两家公司应聘程序都是:应聘者先进行三项专业技能测试,专业技能测试通过后进入面试.已知该应聘者应聘甲公司,每项专业技能测试通过的概率均为  $\frac{2}{3}$ ;该应聘者应聘乙公司,三项专业技能测试通过的概率依次为  $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, m$ ,其中  $0 < m < 1$ .技能测试是否通过相互独立

(1)若  $m = \frac{2}{3}$ ,分别求该应聘者应聘甲、乙两家公司,三项专业技能测试恰好通过两项的概率;

(2)若甲、乙两家公司的招聘在同一时间进行,该应聘者只能应聘其中一家,若以专业技能测试通过项目数的数学期望为决策依据,该应聘者更希望通过乙公司的技能测试,求  $m$  的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = ax \ln x - x (a \in \mathbf{R})$ .

(1)若  $x \in (0, \frac{1}{2}]$ ,  $f(x) \geq -1$ ,求  $a$  的取值范围;

(2)当  $a = 1$  时,记函数  $g(x) = \ln(x+1) - f(x)$  的最大值为  $M$ ,证明:  $M < 2$ .

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,离心率为  $\frac{1}{2}$ ,  $P$  是椭圆  $C$  上一动点,

$\triangle PF_1F_2$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ .

(1)求椭圆  $C$  的标准方程;

(2)不过原点  $O$  的动直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点,平面上一点  $D$  满足  $\vec{OA} = \vec{AD}$ ,连接  $BD$  交椭圆  $C$  于点  $E$  (点  $E$  在线段  $BD$  上且不与端点重合),若  $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{2}{5}$ ,求原点  $O$  到直线  $l$  的距离的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

 自主选拔在线