



高三数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | -3 \leq x < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{1\}$
B. $\{1, 4\}$
C. $\{-2, 1\}$
D. $\{-2, 1, 4\}$

2. $(\frac{3\pi}{2\pi})^{\sqrt{7}+3} =$

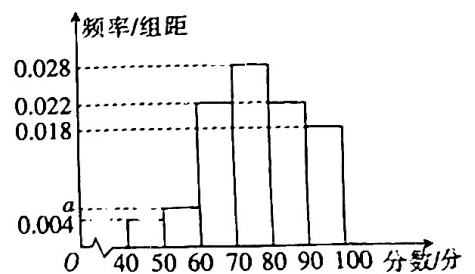
- A. 9
B. $\frac{1}{9}$
C. 3
D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

3. 若圆 C 与 y 轴相切, 则圆 C 的方程可以为

- A. $x^2 + y^2 = 1$
B. $x^2 + (y-1)^2 = 1$
C. $(x-1)^2 + y^2 = 1$
D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

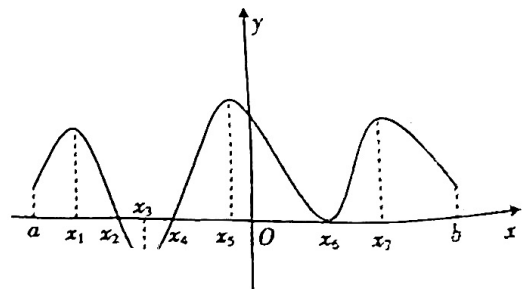
4. 某单位组织开展党史知识竞赛活动, 现把 100 名人员的成绩(单位:分)绘制成频率分布直方图(每组数据均左闭右开), 则

- A. $a = 0.006$
B. 估计这 100 名人员成绩的中位数为 76.6
C. 估计这 100 名人员成绩的平均数为 76.2(同一组数据用该区间的中点值作代表)
D. 若成绩在 $[80, 100)$ 内为优秀, 则这 100 名人员中成绩优秀的有 50 人



5. 已知定义在区间 (a, b) 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f'(x)$ 的图象如图所示, 则

- A. $f(x)$ 在 (x_4, b) 上有增也有减
B. $f(x)$ 有 2 个极小值点
C. $f(x) \leq f(x_5)$
D. $f(x)$ 有 1 个极大值点



百零八塔始建于西夏时期,是中国现存最大且排列最整齐的塔群之...塔群随山势凿石分阶而建,自上而下一共 12 层,第 1 层有 1 座塔,从第 2 层开始每层的塔数均不少于上一层的塔数,总计 108 座塔.已知包括第 1 层在内的其中 10 层的塔数可以构成等差数列 $\{a_n\}$,剩下的 2 层的塔数分别与上一层的塔数相等,第 1 层与第 2 层的塔数不同,则下列结论错误的是



- A. 第 3 层的塔数为 3
B. 第 6 层的塔数为 9
C. 第 4 层与第 5 层的塔数相等
D. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2

住房的许多建材都会释放甲醛.甲醛是一种无色、有着刺激性气味的气体,对人体健康有着极大的危害.新房入住时,空气中甲醛浓度不能超过 0.08 mg/m^3 ,否则,该新房达不到安全入住的标准.若某套住房自装修完成后,通风 x ($x=1, 2, 3, \dots, 50$) 周与室内甲醛浓度 y (单位: mg/m^3) 之间近似满足函数关系式 $y=0.48-0.1f(x)$ ($x \in \mathbb{N}^+$),其中 $f(x)=\log_2[k(x^2-2x+1)]$ ($k>0, x=1, 2, 3, \dots, 50$),且 $f(2)=2, f(8)=3$,则该住房装修完成后要达到安全入住的标准,至少需要通风

- A. 17 周
B. 24 周
C. 28 周
D. 26 周

8. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 O 的球面上,球 O 的表面积为 125π , $AP \perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $AB = AD = AP = m$, $BC = 2m$,

则 $m =$

- A. 4
B. 5
C. $2\sqrt{6}$
D. $2\sqrt{5}$

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 某圆柱的侧面展开图是长为 4 cm、宽为 2 cm 的矩形,则该圆柱的体积可能为

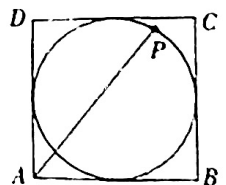
- A. $\frac{4}{\pi} \text{ cm}^3$
B. $\frac{6}{\pi} \text{ cm}^3$
C. $\frac{8}{\pi} \text{ cm}^3$
D. $\frac{12}{\pi} \text{ cm}^3$

10. 设符号函数 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ 已知函数 $f(x) = \text{sgn}(-\sin x) \sin 2x$, 则

- A. $f(x)$ 是偶函数
B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上先增后减
C. $f(x)$ 的最小正周期为 π
D. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称

11. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 2, P 是正方形 $ABCD$ 的内切圆上任意一点, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则

- A. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最大值为 4
B. $\lambda - \mu$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的最大值为 2
D. $\lambda + \mu$ 的最大值为 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$



12. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上焦点为 F , 过焦点 F 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 A , 并与另一条渐近线交于点 B , 若 $|FB| = 4|AF|$, 则 C 的离心率可能为
- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 复数 $\frac{5}{5} + \frac{i}{2i}$ 的实部与虚部之和为 \blacktriangle .
14. 若抛物线 C 的焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 且 C 的开口朝上, 则 C 的标准方程为 \blacktriangle .
15. 2023 年 2 月 6 日, 土耳其发生 7.8 级地震, 我国在第一时间派出救援队进行救援. 已知某救援队共有 8 人, 根据救灾安排, 该救援队需要安排救援人员到三个地区实施救援, 每个地区至少安排 2 人, 每人只去一个地区, 则共有 \blacktriangle 种安排方案.
16. 当 $x, y \in (0, +\infty)$ 时, $x^2 + \frac{5}{4}y^2 - 4y + \frac{4}{xy}$ 的最小值为 \blacktriangle .

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 a, b, c 是公差为 2 的等差数列.

(1) 若 $2\sin C = 3\sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(2) 是否存在正整数 b , 使得 $\triangle ABC$ 的外心在 $\triangle ABC$ 的外部? 若存在, 求 b 的取值集合; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分)

国产科幻电影《流浪地球 2》在给观众带来视觉震撼的同时, 也引领观众对天文、航天、数字科技等领域展开了无限遐想. 某校为激发学生对天文、航天、数字科技三类相关知识的兴趣, 举行了一次知识竞赛 (竞赛试题中天文、航天、数字科技三类相关知识题量占比分别为 40%, 40%, 20%). 某同学回答天文、航天、数字科技这三类问题中每个题的正确率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(1) 若该同学在该题库中任选一题作答, 求他回答正确的概率;

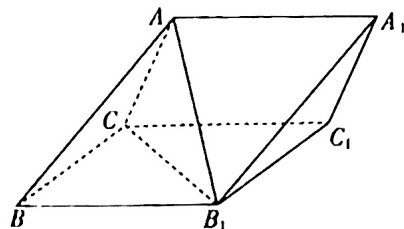
(2) 若该同学从这三类题中各任选一题作答, 每回答正确一题得 2 分, 回答错误不得分, 设该同学回答三题后的总得分为 X 分, 求 X 的分布列及数学期望.

19. (12分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AC=AB_1$.

(1)证明: $AB \perp B_1C$.

(2)若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = \frac{\pi}{3}$, $AB=BC$,求平面 AB_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值.



20. (12分)

已知两个正项数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n - b_n} = b_n, \frac{1}{a_n} = \frac{b_n}{n^2 + 1}$.

(1)求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2)用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,求数列 $\{[a_n + a_{n+1}] \cdot 2^n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - \ln x - a - 1$.

(1)若 $(1, e+1)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上一点,求曲线 $y=f(x)$ 在该点处的切线方程;

(2)若 $a > 0$,证明: $f(x) \geq (1-a)\ln a$.

22. (12分)

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(-2, 0), B(2, 0)$ 分别是椭圆的左、右顶点,动直线 l

过点 $C(6, 0)$,当直线 l 经过点 $D(-2, \sqrt{2})$ 时,直线 l 与椭圆相切.

(1)求椭圆的方程;

(2)若直线 l 与椭圆交于 P, Q (异于 A, B) 两点,且直线 AP 与 BQ 的斜率之和为 $-\frac{1}{2}$,求直线 l 的方程.