炎德·英才大联考长沙市一中2024届高三月考试卷(二)

数　学

时量:120 分钟　　满分:150 分

得分______

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x\mid\log_2 x<3\}$,$B=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{N}\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-1,2,5,8\}$　　B. $\{-1,2,5\}$

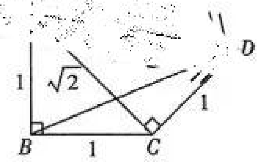
C. $\{2,5,8\}$　　D. $\{2,5\}$

2. 若虚部大于 0 的复数 z 满足方程 $z^2+4=0$,则复数 $\frac{z}{1+z}$ 的共轭复数为

A. $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　B. $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$

C. [illegible]　　D. $-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$

3. [illegible]Theaetetus,公元前 417—公元前 369 年)详细地讨论了[illegible]理数 $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,…. 如图,则 $\cos\angle BAD=$



A. $\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6}$　　B. [illegible]

C. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{6}$

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,定义 $\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}\sin\theta-\boldsymbol{b}\cos\theta|$,已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$,$\boldsymbol{b}=(4,-3)$,则 $\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=$

A. $(3,4)$　　B. $(-4,3)$　　C. 5　　D. 25

5. 血药浓度检测可使给药方案个体化,从而达到临床用药的安全、有效、合理. 某医学研究所研制的某种新药进入了临床试验阶段,经检测,当患者 A 给药 3 小时的时候血药浓度达到峰值,此后每经过 2 小时检测一次,每次检测血药浓度降低到上一次检测血药浓度的 40%,当血药浓度为峰值的 1.024% 时,给药时间为

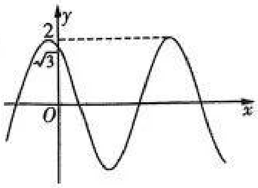
A. 11 小时　　B. 13 小时　　C. 17 小时　　D. 19 小时

6. 对于一些不太容易比较大小的实数,我们常常用构造函数的方法来进行,如,已知 $a=6^{\ln 5}$,$b=7^{\ln 4}$,$c=8^{\ln 3}$,要比较 a,b,c 的大小,我们就可通过构造函数 $f(x)=\ln x\ln(11-x)$ 来进行比较,通过计算,你认为下列关系正确的一项是

A. $a>b>c$　　　　B. $a>c>b$

C. $b>c>a$　　　　D. $c>b>a$

7. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right)$ 的部分图象如图所示，若 $g(x)=f(x)+1$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ 上有且仅有 3 个零点，则 ω 的最小值为



A. $\frac{5}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{19}{6}$　　D. $\frac{9}{2}$

8. 定义在 **R** 上的不恒为零的偶函数 $f(x)$ 满足 $xf(x+2)=(x+2)f(x)$，且 $f(2)=4$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{5}[f(2k)+f(-2k)]=$

A. 30　　B. 60　　C. 90　　D. 120

二、选择题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分）

9. 气象意义上从春季进入夏季的标志为“连续 5 天的日平均温度均不低于 [illegible]”. 现有甲、乙、丙三地连续 5 天的日平均温度（单位：℃）的记录数 [illegible] 整数）：

①甲地：[illegible] 22；

②乙地：5 个数据的中位 [illegible]

③丙地：5 个数据中有一个数据是 [illegible] 方差为 10.8.

则肯定进入夏季的地区有

A. 一个都没有　　B. 甲地

C. 乙地　　D. 丙地

10. 点 P 是直线 $y=3$ 上的一个动点，过点 P 作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线，A,B 为切点，则

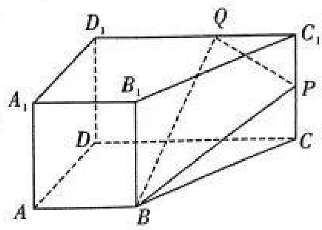
A. 存在点 P，使得 $\angle APB=90°$

B. 弦长 AB 的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

C. 点 A,B 在以 OP 为直径的圆上

D. 线段 AB 经过一个定点 来源：高三答案公众号

11. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是梯形，$AB/\!/CD$，$AD\perp DC$，$BC=CD=4$，$DD_1=AB=2$，P 是棱 CC_1 的中点. Q 是棱 C_1D_1 上一动点（不包含端点），则



A. AC 与平面 BPQ 有可能平行

B. B_1D_1 与平面 BPQ 有可能平行

C. 三角形 BPQ 周长的最小值为 $\sqrt{17}+\sqrt{29}$

D. 三棱锥 $A-BPQ$ 的体积为定值

12. 设正整数 $n=a_0\cdot 9^0+a_1\cdot 9^1+\cdots+a_{k-1}\cdot 9^{k-1}+a_k\cdot 9^k$，其中 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}(i=0,1,2,\cdots,k)$. 记 $\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，则

A. $\omega(11)=3$

B. $\omega(81n+29)=\omega(n)+5$

C. $\omega(9n+10)=\omega(n)+1$

D. $\omega\left(\frac{9^n-1}{8}\right)=n$

三、填空题(本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. $(2x+1)(x+1)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为______. (用数字作答)

14. [illegible]有下列两个性质的函数 $f(x)$:__________.

①[illegible]；②当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

15. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$[illegible]分别为 F_1,F_2，右支上有一点 M，满足 $\angle F_1MF_2=90°$，$\triangle F_1MF_2$ 的[illegible]. 则双曲线 C 的离心率为________.

16. 已知正四面体 $A-BCD$ 的外接球半径为 3，MN 为其外接球的一条直径，P 为正四面体 $A-BCD$ 表面上任意一点，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值为__________.

四、解答题(本大题共 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

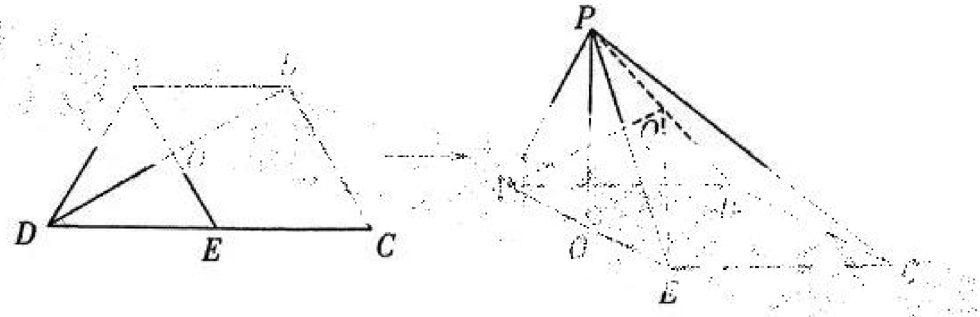
已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{2}{3}$，且满足 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$.

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是等比数列；

(2) 若 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<100$，求满足条件的最大整数 n.

18.（本小题满分 12 分）

如图所示，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AD=AB=BC=2$，$CD=4$，E 为 CD 中点，AE 与 BD 交于点 O，将$\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使点 D 到达点 P 的位置（$P\notin$平面 $ABCE$）.



(1)证明：平面 $POB\perp$平面 PBC；

(2)若 $PB=\sqrt{6}$，试判断线段 PB 上是否存在一点 Q（不含端点），使得直线 PC 与平面 AEQ 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，若存在，求三棱锥 $P-AQE$ 的体积，若不存在，说明理由.

19.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，点 O 为$\triangle ABC$ 的内心，记[illegible]$\triangle OAC$，$\triangle OAB$ 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，已知 $S_1^2+S_3^2-S_1S_3$[illegible]

(1)在①$a\cos$[illegible]$A+\cos 2A=1$；③$\dfrac{1-2\cos A}{\sin A}+\dfrac{1-2\cos B}{\sin B}=0$ 中选一个作为条件，[illegible]存在，求出$\triangle ABC$ 的周长，若不存在，说明理由.（注：如果[illegible]件分别解答，按第一个解答计分.）

(2)若$\triangle ABC$ 为锐角三角形，求$\triangle ABC$ 面积的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=$ [illegible] $\ln x$ [illegible]

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，求实数 a 的最大值；

(2) 若 $0<a<1$，求证：$f(x)\geqslant\frac{2+\ln a}{a}$.

21.（本小题满分 12 分）

新高考数学试卷中有多项选择题，每道多项选择题有 A，B，C，D 这四个选项，四个选项中仅有两个或三个为正确选项. 题目得分规则为：全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分. 已知测试过程中随机地从四个选项中作选择，每个选项是否为正确选项相互独立. 某次多项选择题专项训练中，共有 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 道题，正确选项设计如下：第一题正确选项为两个的概率为 [illegible]，并且规定若第 $i(i=1,2,\cdots,k-1)$ 题正确选项为两个，则第 $i+1$ 题正确选项为两个的概率为 [illegible]；若第 $i(i=1,2,\cdots,k-1)$ 题正确选项为三个，则第 $i+1$ 题正确选项为三个的概率为 $\frac{1}{3}$

(1) 求第 n 题正确选项为两个的概率；

(2) 请根据期望值来判断：第二题是选一个选项还是选两个选项，更能获得较高分.

22.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 和 $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 两点.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)如图所示,记椭圆的左、右顶点分别为 A,B,当动点 M 在定直线 $x=4$ 上运动时,直线 AM,BM 分别交椭圆于两点 P 和 Q.

(i)证明:点 B 在以 PQ 为直径的圆内;

(ii)求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.