百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷　文科数学　参考答案

1. A 【解析】$1+\frac{5i}{3-i}=1+\frac{5i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，该复数在复平面内对应的点的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

2. A 【解析】因为 $A=\{x|y=\sqrt{\ln x}\}=\{x|x\geq1\}$，$B=\{x|x^2-3x+2>0\}=\{x|x<1$ 或 $x>2\}$，所以 $A\cap B=\{x|x>2\}$.

3. C 【解析】因为 $\alpha=660°$，所以 $\tan\alpha=-\frac{b}{a}=\tan660°=-\sqrt{3}$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=2$.

4. C 【解析】设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\Leftrightarrow\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\theta=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\Leftrightarrow\cos\theta=\pm1\Leftrightarrow\theta=0$ 或 $\theta=\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线.

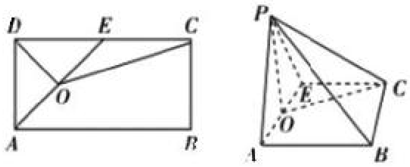
5. C 【解析】不包含日本的另外 7 个国家中，增长率和日本相比，增长率差的绝对值大于 5% 的有 5 个，所以所求概率 $P=\frac{5}{7}$.

6. A 【解析】当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=2^{-x}-\frac{1}{2}x^3$ 是减函数，排除 B，D；当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2}x^3$，$f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>1$，排除 C.

7. B 【解析】因为 $S=\frac{\sqrt{3}c^2\sin A}{4\sin C}=\frac{\sqrt{3}c^2a}{4c}=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{1}{2}ac\sin B$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $2A-C=2A-(\frac{2\pi}{3}-A)=3A-\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{6}<3A-\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $-\frac{1}{2}<\sin(2A-C)\leqslant1$.

8. A 【解析】由 y 与 x 正相关得 $\hat{b}>0$，由题意得 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=4.47$，由 $(\bar{x},\bar{y})$ 在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上得 $3\hat{b}+\hat{a}=4.47$.

9. D 【解析】如右图，因为 $AB/\!/CE$，异面直线 AB 与 PC 所成角就是 $\angle PCE$ 或其补角，在 $\triangle PCE$ 中，$EC=2$，$PE=2$，在左图中作 $DO\perp AE$，垂足为 O，则 $DO=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{10}$，所以 $PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\sqrt{2+10}=2\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle PCE=\frac{PC^2+EC^2-PE^2}{2PC\cdot EC}=\frac{12+2^2-2^2}{2\times2\sqrt{3}\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



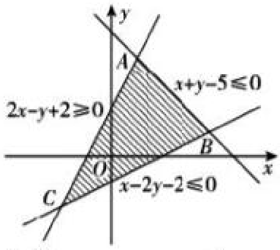
10. C 【解析】当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 第 1 次取到最大值，当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时，$f(x)=-\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，当 $x=\frac{23\pi}{12}$ 时 $f(x)$ 第 2 次取到最大值，由 $f(x+2\pi)=f(x)$ 可知，当 $x=\frac{25\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 第 3 次取到最大值，所以 $\frac{23\pi}{12}\leqslant m<\frac{25\pi}{12}$.

11. A 【解析】存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x)\geqslant f(x_0)$，首先应满足 $a>0$，此时 $x\geqslant0$ 时 $f(x)=x^2-ax+1=(x-\frac{a}{2})^2+1-\frac{a^2}{4}\geqslant1-\frac{a^2}{4}$，$x<0$ 时 $f(x)=\frac{a}{2^x}>a$，所以 $\begin{cases}a>0\\1-\frac{a^2}{4}\leqslant a\end{cases}$，解得 $a\geqslant2\sqrt{2}-2$.

12. B 【解析】$|F_1F_2|=2\sqrt{m-1}$，以线段 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 有 4 个公共点，则 $\sqrt{m-1}>1$，所以 $m>2$，设 $M(-\sqrt{m},0)$，$N(\sqrt{m},0)$，$P_i(x_i,y_i)$，则 $k_{P_iM}\cdot k_{P_iN}=\frac{y_i}{x_i+\sqrt{m}}\cdot\frac{y_i}{x_i-\sqrt{m}}=\frac{y_i^2}{x_i^2-m}=\frac{-\frac{1}{m}(x_i^2-m)}{x_i^2-m}=-\frac{1}{m}$，所以 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}(k_{P_iM}\cdot k_{P_iN})}{m}=-\frac{4}{m^2}\in(-1,0)$.

13. $2x-y+2=0$ 【解析】因为 $f(x)=e^x+\sin x+1$，所以 $f'(x)=e^x+\cos x$，$f'(0)=2$，又 $f(0)=2$，所以曲线 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x+2$，即 $2x-y+2=0$.

14. $[-11,4]$ 【解析】不等式组表示的平面区域如图所示，由 $z=x-3y$，得 $y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$，则直线 $y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$ 经过点 $A(1,4)$ 时，z 取到最小值，$z_{\min}=1-3\times4=-11$，直线 $y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$ 经过点 $C(-2,-2)$ 时，z 取到最大值，$z_{\max}=-2-3\times(-2)=4$，所以 $z=x-3y$ 的取值范围为 $[-11,4]$.



15. $-2\sqrt{2}$ 【解析】因为 φ 为锐角，且 $\cos\varphi=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=2\sqrt{2}$，因为 $f(2\theta-x)=f(x)$，所以 $2\theta+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $2\theta=k\pi-\varphi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\tan2\theta=\tan(k\pi-\varphi)=-\tan\varphi=-2\sqrt{2}$.

16. $\frac{5}{4}\pi$ 【解析】设四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球半径为 R，球心为 O，直线 OM 与平面 $ABCD$ 交于点 N，则 $(OM-MN)^2+AN^2=OA^2$，即 $(R-1)^2+(\sqrt{2})^2=R^2$，$R=\frac{3}{2}$，又球心 O 到平面 ABB_1A_1 的距离 $d=1$，设四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球被平面 ABB_1A_1 截得的圆的半径为 r，则 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{(\frac{3}{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球被平面 ABB_1A_1 截得的截面面积 $S=\pi r^2=\frac{5}{4}\pi$.

17.【解析】(1)因为 $\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)=\frac{1}{2}(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$，

所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=2$。 …………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $a_2=8a_1$，所以 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1+a_2}-\sqrt{a_1}=\sqrt{9a_1}-\sqrt{a_1}=2\sqrt{a_1}=2$，

所以 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$，

因此数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列， …………………………………………… 4 分

所以 $\sqrt{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$，$S_n=(2n-1)^2$，

当 $n\geq2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)^2-(2n-3)^2=8n-8$，

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 8n-8, n\geq2\end{cases}$ ……………………………………………………………………… 7 分

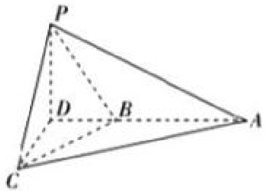
(2)由(1)知 $S_n=(2n-1)^2$，

所以 $b_n=\frac{(2n-1)^2+(2n+1)^2}{4n^2-1}=\frac{8n^2+2}{4n^2-1}=2+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2+2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$， ……………… 9 分

所以 $T_n=2n+2(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=2n+2(1-\frac{1}{2n+1})=2n+\frac{4n}{2n+1}=\frac{4n^2+6n}{2n+1}$. ……
…… 12 分

18.【解析】(1)证明：过点 P 作 AB 延长线的垂线，垂足为 D，连接 CD，

由 $\triangle PBD\cong\triangle CBD$，得 $CD\perp AB$， …………………………………………………………… 2 分



所以$\angle PDC$是二面角$P-AB-C$的平面角．………………………… 3分

因为$\angle PBA=\angle CBA=\frac{2\pi}{3}$，$AB=BC=BP=2$，

则$PD=PB\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$CD=BC\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

因为$PC=\sqrt{6}$，所以$PD^2+DC^2=PC^2$，

所以$\angle PDC=\frac{\pi}{2}$，…………………………………………………………… 5分

从而平面$PAB\perp$平面ABC．……………………………………………………… 6分

(2)由(1)知$\triangle ABC$的面积$S_1=\frac{1}{2}\times AB\times CD=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

所以三棱锥$P-ABC$的体积$V_1=\frac{1}{3}\times PD\times S_1=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$，……………………………… 8分

因为$PB=BC=2$，$PC=\sqrt{6}$，

所以$\triangle PBC$的边PC上的高为$\sqrt{2^2-(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

所以$\triangle PBC$的面积$S_2=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

设点A到平面PBC的距离为h，则三棱锥$A-PBC$的体积$V_2=\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{\sqrt{15}h}{6}$，

由$V_2=V_1$得$\frac{\sqrt{15}h}{6}=1$得$h=\frac{6}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，

所以点A到平面PBC的距离为$\frac{2\sqrt{15}}{5}$．……………………………………………… 12分

19.【解析】(1)列2×2列联表：

	男生	女生	合计
获得2020年度全民义务植树尽责证书	60	20	80
未获得2020年度全民义务植树尽责证书	10	10	20
合计	70	30	100

…………………………………………………………………………………… 3分

$K^2=\frac{100(60\times10-20\times10)^2}{70\times30\times80\times20}\approx4.762>3.841$ ……………………………… 5分

所以有95%的把握认为该校男生更喜欢通过蚂蚁森林获得2020年度全民义务植树尽责证书．……… 7分

(2)这6位同学浇水量的平均数为$\frac{18+22+20+28+17+33}{6}=23$，…………………………… 9分

方差为$\frac{(18-23)^2+(22-23)^2+(20-23)^2+(28-23)^2+(17-23)^2+(33-23)^2}{6}=\frac{98}{3}$．……………… 12分

20.【解析】圆$D:x^2+y^2-8x+2\sqrt{m}y+m-9=0$，即$(x-4)^2+(y+\sqrt{m})^2=25$，

由圆心$D(4,-\sqrt{m})$在抛物线C上，且$|DF|=5$，

由抛物线定义得$4+\frac{p}{2}=5$，所以$p=2$，…………………………………………… 3分

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$，……………………………………………………… 4分

把$D(4,-\sqrt{m})$代入$y^2=4x$得$m=16$．…………………………………………… 5分

(2)设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线MN方程为$x=ty+b$，

与$y^2=4x$联立得$y^2-4ty-4b=0$，$\Delta=16(t^2+b)>0$，

所以 $y_1+y_2=4t, y_1y_2=-4b$, ………… 6分

DM 与 DN 斜率之和为 $\frac{y_1+4}{x_1-4}+\frac{y_2+4}{x_2-4}=\frac{y_1+4}{\frac{y_1^2}{4}-4}+\frac{y_2+4}{\frac{y_2^2}{4}-4}=\frac{4}{y_1-4}+\frac{4}{y_2-4}=-1$, ………… 8分

所以 $y_1y_2=16=-4b\Rightarrow b=-4$, ………… 10分

代入 $x=ty+b$ 得 $x=ty-4$, 直线 MN 经过定点 $(-4,0)$.

所以直线 MN 过定点 $(-4,0)$. ………… 12分

21.【解析】(1)因为 $f(x)=x^2(\ln x-\frac{1}{2})-2ax(\ln x-1)$,

所以 $f'(x)=2x(\ln x-\frac{1}{2})+x^2\cdot\frac{1}{x}-2a(\ln x-1)-2ax\cdot\frac{1}{x}=2(x-a)\ln x(x>0)$, ………… 2分

①当 $a\leqslant 0$ 时, $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$, $f(x)$ 是减函数, $x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$, $f(x)$ 是增函数.

②当 $0<a<1$ 时, $x\in(a,1)$ 时 $f'(x)<0$, $f(x)$ 是减函数, $x\in(0,a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$, $f(x)$ 是增函数.

③当 $a=1$ 时, $f'(x)\geqslant 0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

④当 $a>1$ 时, $x\in(1,a)$ 时 $f'(x)<0$, $f(x)$ 是减函数, $x\in(0,1)$ 或 $x\in(a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$, $f(x)$ 是增函数.
………… 6分

综上可得, 当 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数, 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数, $0<a<1$ 时 $f(x)$ 在 $(a,1)$ 上是减函数, 在 $(0,a)$, $(1,+\infty)$ 上是增函数, $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, $a>1$ 时, $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上是减函数, 在 $(0,1)$, $(a,+\infty)$ 上是增函数. ………… 7分

(2)由(1)知, $1<a<2$ 时 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上是减函数, 在 $(0,1)$ 或 $(a,+\infty)$ 上是增函数.

$f(a)=a^2(\ln a-\frac{1}{2})-2a^2(\ln a-1)=a^2(\frac{3}{2}-\ln a)$,

因为 $1<a<2$, $\frac{3}{2}-\ln a>0$, $f(a)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上没有零点, ………… 9分

$f(x)=x^2(\ln x-\frac{1}{2})-2ax(\ln x-1)=x[(x-2a)\ln x+(2a-\frac{1}{2}x)]$,

当 $1<a<2$ 且 $0<x<1$ 时, $x-2a<0$, $\ln x<0$, $2a-\frac{1}{2}x>0$,

所以 $f(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上没有零点. ………… 11分

综上可得, $1<a<2$ 时 $f(x)$ 的零点个数为 0. ………… 12分

22.【解析】(1)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2+1}\\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$,

消去参数 t 得曲线 C_1 的普通方程为 $2x-y-1=0(0<x\leqslant 1)$. ………… 3分

$\rho=4\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$, 即 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$,

由 $\rho^2=x^2+y^2$, $\rho\cos\theta=x$, $\rho\sin\theta=y$, 得圆 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2\sqrt{3}x+2y$,

即 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. ………… 5分

(2)由曲线 C_1 方程为 $2x-y-1=0(0<x\leqslant 1)$,

可知曲线 C_1 表示以 $A(0,-1)$, $B(1,1)$ 为端点的线段(不包含点 A), ………… 6分

因为 $(0-\sqrt{3})^2+(-1-1)^2>4$, $(1-\sqrt{3})^2+(1-1)^2<4$, ………… 8分

所以点 A 在圆 C_2 外部, 点 B 在圆 C_2 内部,

所以曲线 C_1 与圆 C_2 的公共点个数为 1. ………… 10分

23.【解析】(1)当 $x<0$ 时 $f(x)>2|x|$，即 $\begin{cases}x<0\\x^2+x-2>-2x\end{cases}$，解得 $x<-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$；………………………… 1 分

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时 $f(x)>2|x|$ 等价于 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\x^2+x-2>2x\end{cases}$，解集为 $\varnothing$；………………………………………………… 2 分

当 $x>2$ 时 $f(x)>2|x|$ 等价于 $\begin{cases}x>2\\x^2-x+2>2x\end{cases}$，解得 $x>2$．………………………………………………………… 3 分

所以不等式 $f(x)>2|x|$ 的解集为 $(-\infty,-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2})\cup(2,+\infty)$．………………………………………… 4 分

(2)当 $x\leqslant 2$ 时 $f(x)=x^2+x-2=(x+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{9}{4}\geqslant-\dfrac{9}{4}$，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时取等号，……………………………… 5 分

当 $x>2$ 时 $f(x)=x^2-x+2>2^2-2+2=4$．……………………………………………………………… 6 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\dfrac{9}{4}$．………………………………………………………………………………… 7 分

若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\leqslant a+b$，

所以 $0>a+b\geqslant-\dfrac{9}{4}$，

因为 $(-a)+(-b)\geqslant 2\sqrt{(-a)(-b)}=2\sqrt{ab}$，……………………………………………………………… 8 分

所以 $2\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{9}{4}$，$ab\leqslant\dfrac{81}{64}$，当且仅当 $a=b=-\dfrac{9}{8}$ 时取等号，

所以 ab 的最大值为 $\dfrac{81}{64}$．………………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承〞专业、专注、有态度〞的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。