2022~2023学年度下期高2024届半期考试

数学试卷（理科）（参考答案）

一、选择题（每小题5分，共60分）

BCADB　ACDBB　CA

二、填空题（每小题5分，共20分）

13．i　　14．$2\sqrt{3}$　　15．$(0,+\infty)$　　16．①③④

三、解答题（共70分）

17．解：（Ⅰ）由 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x$，　……………2分

得：$x^2+y^2=4x-3$，

所以曲线C的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，　……………5分

（Ⅱ）设 $B(\rho,\theta)$，则由题意可知 $A(2\rho,\theta)$，

将 A,B 坐标代入方程 $\rho^2=4\rho\cos\theta-3$ 得：$\begin{cases}4\rho^2=8\rho\cos\theta-3\\ \rho^2=4\rho\cos\theta-3\end{cases}$，

$\therefore 4\rho^2-2\rho^2=3$，得 $\rho=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，　……………8分

$\therefore B$ 的极径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.　……………10分

18.解：（Ⅰ）由题中数据可得 $\overline{y}=42$，　……………2分

设生产成本 y 关于蛋白质含量 x 的回归方程为 $y=\hat{b}x+\hat{a}$，

$$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{81.41}{6.79}=11.99，$$　……………4分

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}=42-11.99\times1.68=21.86$，

所以回归方程为 $y=11.99x+21.86$，　……………6分

（Ⅱ）当 $y=60$ 时，由（1）得 $11.99x+21.86=60$.

解得 $x\approx3.18$，　……………8分

当 $y=70$ 时，由（1）得 $11.99x+21.86=70$.

解得 $x\approx4.02$，　……………10分

所以生产的乳制品蛋白质含量的取值范围为 $[3.18,4.02]$.　……………12分

19．解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x(x^2-ax-a+2x-a)=e^x(x+2)(x-a)$，

$\because x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，

$\therefore f'(1)=e(1+2)(1-a)=0$，

解得 $a=1$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………3 分

当 $x\in(-2,1)$ 时， $f'(x)<0$ ，$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ，$\therefore$ $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$\therefore$ $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点；　　　　　　　　　…………6 分

（Ⅱ）$\because$ $f'(x)=e^x(x+2)(x-a)$，

①当 $a=-2$ 时， $f'(x)=e^x(x+2)^2\ge 0$ 在 R 上恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

②当 $a<-2$ 时，令 $f'(x)\ge 0$ ，解得 $x<a$ 或 $x>-2$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $(a,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

③当 $a>-2$ 时，令 $f'(x)\ge 0$ ，解得 $x<-2$ 或 $x>a$ ，

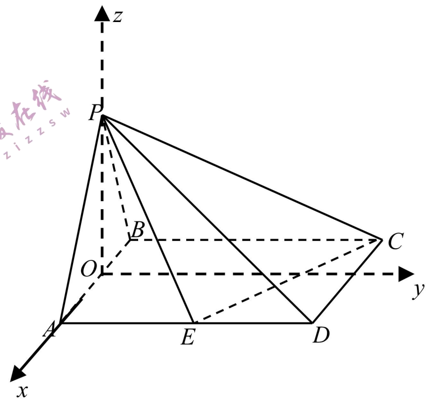
所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，…………11 分

综上，当 $a=-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

当 $a<-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ ， $(-2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,-2)$ 上单调递减，

当 $a>-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ ， $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 上单调递减；…………12 分

20．解（Ⅰ）取 AB 中点 O，连接 PO、OE，



由题知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore \angle PEO=45^\circ$ ，$\therefore$ $PO=OE=\sqrt{3}$

又 $AE\perp AO$,$\therefore$ $AE=\sqrt{2},AD=2\sqrt{2}$ ，　　　　　…………2 分

如图建立空间坐标系，

$B(-1,0,0),P(0,0,\sqrt{3}),C(-1,2\sqrt{2},0),E(1,\sqrt{2},0)$

设平面 PCE 法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{CE}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{PC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1-\sqrt{2}y_1=0\\ -x_1+2\sqrt{2}y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$ ，令 $x_1=1,y_1=\sqrt{2},z_1=\sqrt{3}$

所以 $\vec{n}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$

同理设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}$ ，得 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,-1)$ ，…………4 分

又 $\vec{n}\cdot\vec{m}=\sqrt{3}+0-\sqrt{3}=0$

所以平面 $PCE\perp$ 平面 PBC ，　　　　　　　　…………6 分

（Ⅱ） $\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$

$\cos<\overrightarrow{PA},\vec{n}>=\dfrac{1-3}{2\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ，　　　　　　…………10 分

所以直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$． …………12 分

21．解：（1）设直线 AB 方程为 $y=kx+2$， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ x^2=4y \end{cases} \Rightarrow x^2-4kx-8=0$， $\therefore x_1+x_2=4k, x_1x_2=-8$， …………2 分

$\therefore N(2k,k^2)$， …………3 分

函数 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 的导函数为 $y'=\dfrac{x}{2}$，

所以抛物线在 N 点处的切线的斜率为 $\dfrac{2k}{2}$，

$\therefore \dfrac{2k}{2}=2$， 即 $k=1$

$\therefore l_{AB}: y=x+2$； …………5 分

（2）由（1）问可得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{16k^2+32}$，

点 $N(2k,k^2)$ 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{|k^2+2|}{\sqrt{1+k^2}}$，

点 $D(0,11)$ 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{9}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S=S_{\Delta DAB}-S_{\Delta NAB}=18\sqrt{k^2+2}-2\sqrt{k^2+2}\cdot(k^2+2)$， …………8 分

令 $t=\sqrt{k^2+2}\ge\sqrt{2}$，

$\therefore S=18t-2t^3$， 令函数 $f(t)=18t-2t^3$，

$f'(t)=18-6t^2=6(3-t^2)$，

所以函数 $f(t)$ 在区间 $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ 上递增，在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上递减，

$\therefore t=\sqrt{3}$， 即 $k=\pm1$ 时， ΔDAB 与 ΔNAB 面积之差取得最大值 $12\sqrt{3}$． …………12 分

22．解：（Ⅰ） $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x)$，

令函数 $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$， 则 $g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2-2x+1}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x}\ge 0$，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增， …………2 分

又 $\because g(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时， $g(x)<0$， 即 $f'(x)<0$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g(x)>0$， 即 $f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=2$，　　　　　　　　　　　…………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）问知 $x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2\ge 2$，即 $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2>(\ln x)^2$，

所以当 $x>1$ 时，$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}>\ln x$ 成立，　　　　　　　　…………5 分

现用数学归纳法证明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2^k\cdot(2^k+1)}}>\ln\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$

当 $n=1$ 时，$\ln\dfrac{4}{3}<\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ 成立，

假设当 $n=k$ 时，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{2^1\cdot(2^1+1)}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2^k(2^k+1)}}>\ln\dfrac{2^{k+1}}{2^k+1}$ 成立，

则当 $n=k+1$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{2^1\cdot(2^1+1)}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2^k(2^k+1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}>\ln\dfrac{2^{k+1}}{2^k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}$，

要证明 $\dfrac{1}{\sqrt{2^1\cdot(2^1+1)}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2^k(2^k+1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}>\ln\dfrac{2^{k+2}}{2^{k+1}+1}$，

$\Leftarrow\ln\dfrac{2^{k+1}}{2^k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}>\ln\dfrac{2^{k+2}}{2^{k+1}+1}$，　　　　　…………7 分

$\Leftarrow\ln\dfrac{2^{k+2}}{2^{k+1}+1}-\ln\dfrac{2^{k+1}}{2^k+1}<\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}$，

$\Leftarrow\ln\dfrac{2^{k+1}+2}{2^{k+1}+1}<\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}$，令 $x=\dfrac{2^{k+1}+2}{2^{k+1}+1}$，则 $2^{k+1}=\dfrac{2-x}{x-1}$

$\Leftarrow\ln x<\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-1}}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}}$，$\because\ln x<\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\Leftarrow\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}}$，

$\Leftarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$，

$\Leftarrow\sqrt{x}>\sqrt{2-x}$，$\Leftarrow x>1$　　　　　　　　　　　…………10 分

$\because x=\dfrac{2^{k+1}+2}{2^{k+1}+1}\in(1,\dfrac{6}{5})$，

$\therefore x>1$，成立，

$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{2^1\cdot(2^1+1)}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2^k(2^k+1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{k+1}(2^{k+1}+1)}}>\ln\dfrac{2^{k+2}}{2^{k+1}+1}$ 成立，

综上，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2^k\cdot(2^k+1)}}>\ln\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$ 成立．…………12 分