

## 文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x > -1\}$ ,  $B = \{x | x < 2\}$ , 则  $A \cap B =$  【C】  
 A.  $(-1, +\infty)$  B.  $(-\infty, 2)$  C.  $(-1, 2)$  D.  $\emptyset$
2. 设  $z = i(2+i)$ , 则  $\bar{z} =$  【D】  
 A.  $1+2i$  B.  $-1+2i$  C.  $1-2i$  D.  $-1-2i$
3. 已知向量  $a = (2, 3)$ ,  $b = (3, 2)$ , 则  $|a - b| =$  【A】  
 A.  $\sqrt{2}$  B. 2 C.  $5\sqrt{2}$  D. 50
4. 生物实验室有 5 只兔子，其中只有 3 只测量过某项指标。若从这 5 只兔子中随机取出 3 只，则恰有 2 只测量过该指标的概率为 【B】  
 A.  $\frac{2}{3}$  B.  $\frac{3}{5}$  C.  $\frac{2}{5}$  D.  $\frac{1}{5}$
5. 在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测。  
 甲：我的成绩比乙高。  
 乙：丙的成绩比我和甲的都高。  
 丙：我的成绩比乙高。  
 成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为 【A】  
 A. 甲、乙、丙 B. 乙、甲、丙 C. 丙、乙、甲 D. 甲、丙、乙
6. 设  $f(x)$  为奇函数，且当  $x \geq 0$  时， $f(x) = e^x - 1$ ，则当  $x < 0$  时， $f(x) =$  【D】  
 A.  $e^{-x} - 1$  B.  $e^{-x} + 1$  C.  $-e^{-x} - 1$  D.  $-e^{-x} + 1$
7. 设  $\alpha, \beta$  为两个平面，则  $\alpha \parallel \beta$  的充要条件是 【B】  
 A.  $\alpha$  内有无数条直线与  $\beta$  平行  
 B.  $\alpha$  内有两条相交直线与  $\beta$  平行  
 C.  $\alpha, \beta$  平行于同一条直线  
 D.  $\alpha, \beta$  垂直于同一平面
8. 若  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{3\pi}{4}$  是函数  $f(x) = \sin \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 两个相邻的极值点，则  $\omega =$  【A】  
 A. 2 B.  $\frac{3}{2}$  C. 1 D.  $\frac{1}{2}$
9. 若抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点是椭圆  $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$  的一个焦点，则  $p =$  【D】  
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 8

10. 曲线  $y = 2\sin x + \cos x$  在点  $(\pi, -1)$  处的切线方程为 **【C】**

- A.  $x - y - \pi - 1 = 0$  B.  $2x - y - 2\pi - 1 = 0$   
C.  $2x + y - 2\pi + 1 = 0$  D.  $x + y - \pi + 1 = 0$

11. 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$ , 则  $\sin \alpha =$  **【B】**

- A.  $\frac{1}{5}$  B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 设  $F$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点,  $O$  为坐标原点, 以  $OF$  为直径的圆与圆  $x^2 + y^2 = a^2$  交于  $P, Q$  两点. 若  $|PQ| = |OF|$ , 则  $C$  的离心率为 **【A】**

- A.  $\sqrt{2}$  B.  $\sqrt{3}$  C. 2 D.  $\sqrt{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ y - 2 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = 3x - y$  的最大值是 9.

14. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为 0.98.

15.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $b\sin A + a\cos B = 0$ , 则  $B =$   $\frac{3\pi}{4}$ .

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有 26 个面, 其棱长为  $\sqrt{2}-1$ . (本题第一空 2 分, 第二空 3 分.)



图 1



图 2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

如图，长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是正方形，

点  $E$  在棱  $AA_1$  上， $BE \perp EC_1$ 。

(1) 证明： $BE \perp$  平面  $EB_1C_1$ ；

(2) 若  $AE = A_1E$ ， $AB = 3$ ，求四棱锥  $E-BB_1C_1C$  的体积。

解：(1) 由已知得  $B_1C_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ， $BE \subset$  平面  $ABB_1A_1$ ，

故  $B_1C_1 \perp BE$ 。

又  $BE \perp EC_1$ ，所以  $BE \perp$  平面  $EB_1C_1$ 。

(2) 由 (1) 知  $\angle BEB_1 = 90^\circ$ 。由题设知  $Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle A_1B_1E$ ，所以  $\angle AEB = \angle A_1EB_1 = 45^\circ$ ，故  $AE = AB = 3$ ，

$AA_1 = 2AE = 6$ 。

作  $EF \perp BB_1$ ，垂足为  $F$ ，则  $EF \perp$  平面  $BB_1C_1C$ ，且

$EF = AB = 3$ 。

所以，四棱锥  $E-BB_1C_1C$  的体积  $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \times 3 = 18$ 。

18. (12 分)

已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等比数列， $a_1 = 2$ ， $a_3 = 2a_2 + 16$ 。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 设  $b_n = \log_2 a_n$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和。

解：(1) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，由题设得

$$2q^2 = 4q + 16, \text{ 即 } q^2 - 2q - 8 = 0.$$

解得  $q = -2$  (舍去) 或  $q = 4$ 。

因此  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$ 。

(2) 由 (1) 得  $b_n = (2n-1)\log_2 2 = 2n-1$ ，因此数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为

$$1+3+\cdots+2n-1 = n^2.$$

19. (12分)

某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况，随机调查了100个企业，得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率  $y$  的频数分布表.

| $y$ 的分组 | $[-0.20, 0)$ | $[0, 0.20)$ | $[0.20, 0.40)$ | $[0.40, 0.60)$ | $[0.60, 0.80)$ |
|---------|--------------|-------------|----------------|----------------|----------------|
| 企业数     | 2            | 24          | 53             | 14             | 7              |

(1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于40%的企业比例、产值负增长的企业比例;

(2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值. (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到0.01)

附:  $\sqrt{74} \approx 8.602$ .

解: (1) 根据产值增长率频数分布表得, 所调查的100个企业中产值增长率不低于40%的企业频率为  $\frac{14+7}{100} = 0.21$ .

产值负增长的企业频率为  $\frac{2}{100} = 0.02$ .

用样本频率分布估计总体分布得这类企业中产值增长率不低于40%的企业比例为21%, 产值负增长的企业比例为2%.

$$(2) \bar{y} = \frac{1}{100} (-0.10 \times 2 + 0.10 \times 24 + 0.30 \times 53 + 0.50 \times 14 + 0.70 \times 7) = 0.30,$$

$$s^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 n_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{100} [(-0.40)^2 \times 2 + (-0.20)^2 \times 24 + 0^2 \times 53 + 0.20^2 \times 14 + 0.40^2 \times 7]$$

$$= 0.0296,$$

$$s = \sqrt{0.0296} = 0.02 \times \sqrt{74} \approx 0.17.$$

所以, 这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值分别为30%, 17%.

20. (12分)

已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的两个焦点,  $P$  为  $C$  上的点,  $O$  为坐标原点.

(1) 若  $\triangle POF_2$  为等边三角形, 求  $C$  的离心率;

(2) 如果存在点  $P$ , 使得  $PF_1 \perp PF_2$ , 且  $\triangle F_1PF_2$  的面积等于16, 求  $b$  的值和  $a$  的取值范围.

解: (1) 连结  $PF_1$ . 由  $\triangle POF_2$  为等边三角形可知在  $\triangle F_1PF_2$  中,  $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ,  $|PF_2| = c$ ,

$|PF_1| = \sqrt{3}c$ , 于是  $2a = |PF_1| + |PF_2| = (\sqrt{3} + 1)c$ , 故  $C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$ .

(2) 由题意可知, 满足条件的点  $P(x, y)$  存在当且仅当

$$\frac{1}{2}|y| \cdot 2c = 16, \quad \frac{y}{x+c} \cdot \frac{y}{x-c} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

即

|                                          |   |               |            |               |           |
|------------------------------------------|---|---------------|------------|---------------|-----------|
| $c y =16,$                               | ① | $(0, 0.5, 0]$ | $(0.5, 0]$ | $(0, 0.5, 0]$ | 顶点为 $\pi$ |
| $x^2 + y^2 = c^2,$                       | ② |               | $\pi/2$    | $\pi$         | 焦点在 $\pi$ |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ | ③ |               |            |               | 椭圆        |

由②③及  $a^2 = b^2 + c^2$  得  $y^2 = \frac{b^4}{c^2}$ , 又由①知  $y^2 = \frac{16^2}{c^2}$ , 故  $b = 4$ .

由②③得  $x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - b^2)$ , 所以  $c^2 \geq b^2$ , 从而  $a^2 = b^2 + c^2 \geq 2b^2 = 32$ , 故  $a \geq 4\sqrt{2}$ .

当  $b = 4$ ,  $a \geq 4\sqrt{2}$  时, 存在满足条件的点  $P$ .

所以  $b = 4$ ,  $a$  的取值范围为  $[4\sqrt{2}, +\infty)$ .

21. (12分)

已知函数  $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$ . 证明:

(1)  $f(x)$  存在唯一的极值点;

(2)  $f(x) = 0$  有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

解: (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ .

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x - 1 = \ln x - \frac{1}{x}.$$

因为  $y = \ln x$  单调递增,  $y = \frac{1}{x}$  单调递减, 所以  $f'(x)$  单调递增. 又  $f'(1) = -1 < 0$ ,

$$f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 4 - 1}{2} > 0,$$

故存在唯一  $x_0 \in (1, 2)$ , 使得  $f'(x_0) = 0$ .

又当  $x < x_0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x > x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

因此,  $f(x)$  存在唯一的极值点.

(2) 由 (1) 知  $f(x_0) < f(1) = -2$ , 又  $f(e^2) = e^2 - 3 > 0$ , 所以  $f(x) = 0$  在  $(x_0, +\infty)$  内存在唯一根  $x = \alpha$ .

由  $\alpha > x_0 > 1$  得  $\frac{1}{\alpha} < 1 < x_0$ .

又  $f(\frac{1}{\alpha}) = (\frac{1}{\alpha} - 1)\ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$ , 故  $\frac{1}{\alpha}$  是  $f(x) = 0$  在  $(0, x_0)$  的唯一根.

综上,  $f(x) = 0$  有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

• 14 •

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在极坐标系中,  $O$  为极点, 点  $M(\rho_0, \theta_0)$  ( $\rho_0 > 0$ ) 在曲线  $C: \rho = 4\sin\theta$  上, 直线  $l$  过点  $A(4, 0)$  且与  $OM$  垂直, 垂足为  $P$ 。

(1) 当  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  时, 求  $\rho_0$  及  $l$  的极坐标方程;

(2) 当  $M$  在  $C$  上运动且  $P$  在线段  $OM$  上时, 求  $P$  点轨迹的极坐标方程。

解: (1) 因为  $M(\rho_0, \theta_0)$  在  $C$  上, 当  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  时,  $\rho_0 = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ 。

由已知得  $|OP| = |OA|\cos\frac{\pi}{3} = 2$ 。

设  $Q(\rho, \theta)$  为  $l$  上除  $P$  的任意一点, 在  $\text{Rt}\triangle OPQ$  中,  $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = |OP| = 2$ 。  
经检验, 点  $P(2, \frac{\pi}{3})$  在曲线  $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 2$  上。

所以,  $l$  的极坐标方程为  $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 2$ 。

(2) 设  $P(\rho, \theta)$ , 在  $\text{Rt}\triangle OAP$  中,  $|OP| = |OA|\cos\theta = 4\cos\theta$ , 即  $\rho = 4\cos\theta$ 。

因为  $P$  在线段  $OM$  上, 且  $AP \perp OM$ , 故  $\theta$  的取值范围是  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 。

所以,  $P$  点轨迹的极坐标方程为  $\rho = 4\cos\theta$ ,  $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 。

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知  $f(x) = |x-a| + |x-2|(x-a)$ 。

(1) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) < 0$  的解集;

(2) 若  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f(x) < 0$ , 求  $a$  的取值范围。

解: (1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = |x-1| + |x-2|(x-1)$ 。

当  $x < 1$  时,  $f(x) = -2(x-1)^2 < 0$ ; 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq 0$ 。

所以, 不等式  $f(x) < 0$  的解集为  $(-\infty, 1)$ 。

(2) 因为  $f(a) = 0$ , 所以  $a \geq 1$ 。

当  $a \geq 1$ ,  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f(x) = (a-x)x + (2-x)(x-a) = 2(a-x)(x-1) < 0$ 。

所以,  $a$  的取值范围是  $[1, +\infty)$ 。

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注