2023-2024 学年度高三年级第一次调研测试

数学试题答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. B　2. C　3. A　4. D　5. C　6. B　7. C　8. B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. ABC　10. AB　11. BC　12. BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $2-\sqrt{3}$　14. 0.9　15. $(\sqrt{e},+\infty)$　16. $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（1）$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}BD\cdot AD\cdot\sin\angle ADB+\dfrac{1}{2}DC\cdot AD\cdot\sin\angle ADC$，　2 分

因为 $\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

则 $S=\dfrac{1}{2}(BD+DC)\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}a\cdot 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=2$，所以 $a=2\sqrt{2}$．　4 分

解法二：$\triangle ABC$ 的高 $h=AD\sin\angle ADB=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，　2 分

所以 $S=\dfrac{1}{2}BC\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{2}=2$，则 $a=2\sqrt{2}$．　4 分

（2）因为 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，所以 $\angle BAD=\angle DAC$，

设 $\angle BAD=\angle DAC=\theta$，则 $\angle ADB=\angle DAC+\angle C=\theta+\dfrac{\pi}{4}$．

在 $\triangle ABD$ 中，因为 $AB=AD=2$，所以 $\angle B=\angle ADB=\theta+\dfrac{\pi}{4}$，　6 分

由内角和定理，$\angle B+\angle ADB+\angle BAD=2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\theta=3\theta+\dfrac{\pi}{2}=\pi$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$．　8 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{c}{\sin C}$，则 $a=\dfrac{c\sin\angle BAC}{\sin C}=\dfrac{2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{6}$．　10 分

18.（1）证明：如图，取 BD 中点 O，连接 OA，OP．

因为四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60°$，所以 $\triangle ABD$、$\triangle PBD$ 是边长为 2 的正三角形，

因为 O 是 BD 中点，所以 $OA\perp BD$，$OP\perp BD$，　2 分

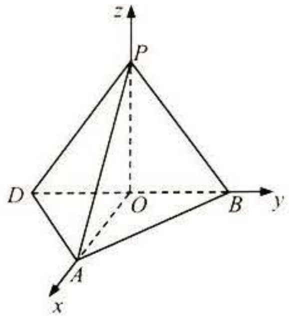
因为 $PD=2, OD=\dfrac{1}{2}BD=1$，所以 $OP=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{3}$，同理可得 $OA=\sqrt{3}$，因为 $PA=\sqrt{6}$，

所以 $OP^2+OA^2=PA^2$，则 $OP\perp OA$，由二面角定义可得平面 $PBD\perp$ 平面 ABD．　5 分

或：又因为 $OP\perp BD$，$OA,BD\subset$ 平面 ABD，$OA\cap BD=O$，所以 $OP\perp$ 平面 ABD，

因为 $OP\subset PBD$，所以平面 $PBD\perp$ 平面 ABD. 5 分

（2）以 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $O(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),B(0,1,0),D(0,-1,0),P(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}),\overrightarrow{DP}=(0,1,\sqrt{3})$， 7 分

设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DP}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(x,y,z)\cdot(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=(x,y,z)\cdot(0,1,\sqrt{3})=y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$ 得 $y=-\sqrt{3},z=1$，则 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},1)$， 10 分

设直线 AB 与平面 PAD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{(1,-\sqrt{3},1)\cdot(-\sqrt{3},1,0)}{\sqrt{1+3+1}\cdot\sqrt{3+1+0}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

所以直线 AB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. 12 分

注：第二问用等积法、综合法等方法解答同样给分.

19.（1）因为 $f(x)=ax^2-2\ln x$，所以 $f'(x)=2ax-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(ax^2-1)}{x},x>0$. 1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减； 3 分

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增．　　　　　6 分

（2）当 $a>0$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=\ln a+1$，

要证明 $f(x)\ge 2-\frac{1}{a}$，只要证 $\ln a+1\ge 2-\frac{1}{a}$，即证 $\ln a+\frac{1}{a}-1\ge 0$，　　　　　8 分

设 $\varphi(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1, a>0$，则 $\varphi'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}$，令 $\varphi'(a)=0$ 得 $a=1$，列表得

a	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(a)$	−	0	+
$\varphi(a)$	↘	极小值	↗

所以 $\varphi(a)\ge\varphi(1)=0$，即 $\ln a+\frac{1}{a}-1\ge 0$，所以 $f(x)\ge 2-\frac{1}{a}$.　　　　　12 分

20.（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，　　　　　11 分

则 $\begin{cases}a_5=a_1+4d=9\\S_7=7a_1+21d=49\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$．　　　　　3 分

因为 $T_n=b_{n+1}-1$，当 $n=1$ 时，$b_1=T_1=b_2-1$，则 $b_2=2$，所以 $b_2=2b_1$；　　　　　4 分

当 $n\ge 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=b_{n+1}-1-(b_n-1)=b_{n+1}-b_n$，所以 $b_{n+1}=2b_n$，

则 $\{b_n\}$ 构成首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $b_n=2^{n-1}$．

（2）因为 $c_n=\frac{a_n^2}{b_n}=\frac{(2n-1)^2}{2^{n-1}}$，所以 $c_1=1,c_2=\frac{9}{2},c_3=\frac{25}{4}$，　　　　　7 分

当 $n\ge 3$ 时，$c_{n+1}-c_n=\frac{(2n+1)^2}{2^n}-\frac{(2n-1)^2}{2^{n-1}}=\frac{-4n^2+12n-1}{2^n}$，

因为 $-4n^2+12n-1=-4\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+8$ 在 $n\ge 3$ 时单调递减，所以 $-4n^2+12n-1\le -1<0$，

所以，当 $n\ge 3$ 时，$c_{n+1}-c_n<0$，即 $c_n>c_{n+1}$，所以 $c_1<c_2<c_3>c_4>c_5>\cdots$，　　　　　11 分

所以数列 $\{c_n\}$ 的最大项为 $c_3=\frac{25}{4}$．　　　　　12 分

注：第二问解方程组$\begin{cases}c_n \ge c_{n-1}\\ c_n \ge c_{n+1}\end{cases}$得$n\in\left[\frac{3}{2}+\sqrt{2},\frac{5}{2}+\sqrt{2}\right]$，结合$n\in\mathbf{N}^*$得最大项为$c_3=\frac{25}{4}$同样给分.

21.（1）因为每个箱子中放入的奖品个数ξ满足$P(\xi=n)=k\cdot n\quad(n=1,2,3,4,5)$，

所以$k\cdot(1+2+3+4+5)=1$，则$k=\frac{1}{15}$，所以ξ的概率分布为：

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

2 分

设事件A为甲能从 1 号箱子中取走一个奖品，则$P(A)=P(\xi>3)=P(\xi=4)+P(\xi=5)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$，

所以甲能从 1 号箱子中取走一个奖品的概率为$\frac{3}{5}$　　　4 分

（2）$X=0,1,2,3,4$，因为甲能从每个箱子中取走一个奖品的概率为$\frac{3}{5}$，所以$X\sim B\left(4,\frac{3}{5}\right)$，

所以$P(X=k)=C_4^k\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$，$X$的概率分布为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

8 分

所以X的数学期望为$E(X)=0\times\frac{16}{625}+1\times\frac{96}{625}+2\times\frac{216}{625}+3\times\frac{216}{625}+4\times\frac{81}{625}=\frac{12}{5}$.

或$E(X)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$.　　　9 分

（3）乙能从箱子中取到奖品必须箱子中最初有 5 个奖品，即乙能从每个箱子中取走一个奖品的概率为

$p=P(\xi=5)=\frac{1}{3}$，所以$Y\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，所以$Y$的数学期望为$E(Y)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.　　　12 分

22.（1）因为$b=0$所以$f(x)=e^x-ax^2, f'(x)=e^x-2ax, f''(x)=e^x-2a$，令$f''(x)=0$得$x=\ln 2a$，

则$f'(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递减，在$(\ln 2a,+\infty)$上单调递增，所以$f'(x)\ge f'(\ln 2a)=2a(1-\ln 2a)$.

①当$1-\ln 2a\ge 0$，即$0<a\le\frac{e}{2}$时，$f'(x)\ge 0, f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

因为$f(0)=1>0, f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}-1<0$，所以$\exists t\in\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},0\right)$使得$f(t)=0$，

所以$g(x)=|f(x)|$在$(-\infty,t)$上单调递减，在$(t,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)$ 仅有一个极小值点 $x=t$，不合题意．　　　　　　　　　　2 分

②当 $1-\ln 2a<0$，即 $a>\dfrac{e}{2}$ 时，$f'(\ln 2a)<0$．

设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x>e$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，则 $\varphi(x)<\varphi(1)=\dfrac{1}{e}$．

当 $x>e$ 时，$\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{e}<1$，所以 $x>\ln x$，因为 $2a>e$，所以 $2a>\ln 2a$，则 $0<\ln 2a<2a$；

当 $x>e$ 时，$\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，所以 $x>2\ln x=\ln x^2$，则 $e^x>x^2$，所以 $f'(2a)=e^{2a}-(2a)^2>0$．

因为 $f'(0)=1>0, f'(\ln 2a)<0, f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\exists x_1\in(0,\ln 2a), x_2\in(\ln 2a,2a)$，使 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，(x_1,x_2) 上单调递减，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增．　　　　4 分

因为 $f(-1)=\dfrac{1}{e}-a<0, f(0)=1>0, g(x)=|f(x)|$ 有两个极小值点，

所以 $\exists x_3\in(-1,0)$ 为 $g(x)$ 的极小值点，且 $\begin{cases} f(x_2)=e^{x_2}-ax_2^2\ge 0 \\ f'(x_2)=e^{x_2}-2ax_2=0 \end{cases}$ 时，x_2 为 $g(x)$ 的极小值点，

所以 $2ax_2-ax_2^2=ax_2(2-x_2)\ge 0$，即 $x_2\le 2$，则 $f(2)=e^2-4a\ge 0$，所以 $\dfrac{e}{2}<a\le\dfrac{e^2}{4}$，

此时，$g(x)$ 在 $(-\infty,x_3)$ 上单调递减，(x_3,x_1) 上单调递增，(x_1,x_2) 上单调递减，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增，

所以，在 $x=x_3$ 及 $x=x_2$ 处取得极小值，实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{e}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$．　　　　6 分

（2）因为 $b=1$，所以 $f(x)=e^x-ax^2+x, f(x_1)+f(x_2)=e^{x_1}+e^{x_2}-a(x_1^2+x_2^2)+x_1+x_2=2, a<0$．

则 $e^{x_1}+e^{x_2}-a\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+x_1+x_2=2$，即 $e^{x_1}+e^{x_2}+2ax_1x_2=a(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)+2$，

因为 $e^{x_1}+e^{x_2}\ge 2e^{\frac{x_1+x_2}{2}}, 2ax_1x_2\ge 2a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2$，则 $a(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)+2\ge 2e^{\frac{x_1+x_2}{2}}+\dfrac{a}{2}(x_1+x_2)^2$，　8 分

令 $t=x_1+x_2$，则 $2e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{a}{2}t^2+t-2\le 0$，令 $g(t)=2e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{a}{2}t^2+t-2, a<0$，

则 $g'(t)=e^{\frac{1}{2}}-at+1, g''(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-a>0$，所以 $g'(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，

因为 $g'\left(\dfrac{2}{a}\right)=e^{\frac{1}{a}}-1<0, g'(0)=2>0$，所以 $\exists x_0\in\left(\dfrac{2}{a},0\right)$ 使得 $g'(x_0)=0$，

所以 $g(t)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递减，$(x_0, +\infty)$ 单调递增， 10 分

又 $g(0)=0, g\left(\frac{4}{a}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}-\frac{4}{a}-2\geq 2\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}-\frac{2}{a}-1\right)>0$，

所以 $\frac{4}{a}\leq t\leq 0$，即 $\frac{4}{a}\leq x_1+x_2\leq 0$． 12 分