高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|0<x\leqslant 4\}, B=\{x|-1<x<3\}$,所以 $A\cap B=\{x|0<x<3\}$.

2. C 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $a+b\mathrm{i}=(1-3\mathrm{i})\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$,所以 $a=3, b=1, a-b=2$.

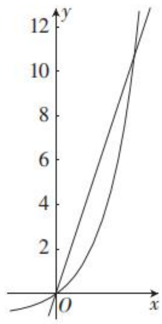
3. A 【解析】本题考查函数的性质,考查数学运算的核心素养.

因为 $f(x)=x^2+(a-2)x-2a$,所以 $f(-x)=x^2-(a-2)x-2a$,由 $f(-x)=f(x)$,解得 $a=2$. 无界学习公众号

4. D 【解析】本题考查双曲线的性质,考查数学运算的核心素养.

设离心率为 e,因为 $2a=3\times 2b$,所以 $a=3b$,所以 $e^2=1+(\frac{b}{a})^2=\frac{10}{9}$,解得 $e=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

5. B 【解析】本题考查函数的应用,考查直观想象的核心素养.



设当甲、乙再次相遇时,所用的时间为 t 小时. 则 $2^t-1=3t$,分别作出 $f(t)=2^t-1, g(t)=3t$ 的大致图象,令 $F(t)=2^t-1-3t$. 则 $F'(t)=2^t\ln 2-3$ 为增函数, $F(t)=2^t-1-3t$ 有唯一的极值点 $t_0=\log_2\frac{3}{\ln 2}$. 则 $F(t)=2^t-1-3t$ 在 $(0,t_0)$ 上单调递减,在 $(t_0,+\infty)$ 上单调递增,由于 $F(2)<0, F(3)<0, F(4)>0$,所以 $t\in(3,4)$. 无界学习公众号

6. D 【解析】本题考查解三角形的知识,考查数学运算的核心素养.

因为 $b\cos A=a(\sqrt{3}-\cos B)$,所以 $\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A-\sin A\cos B$,

移项得 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin A$,即 $\sin C=\sqrt{3}\sin A$,所以 $c=\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$.

7. C 【解析】本题考查抽象函数的求值,考查数学抽象的核心素养.

因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,所以 $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$,即 $f(0)=0$.

所以 $f(\ln 2023)+f(\ln\frac{1}{2023})=f(\ln 2023-\ln 2023)=f(0)=0$.

8. B 【解析】本题考查数学文化与等比数列的求和,考查数学抽象与数学运算的核心素养.

由题意,若正整数 $m\leqslant 6^n$,且与 6^n 不互质,则这个数为偶数或 3 的倍数,共有 $\frac{2}{3}\times 6^n$ 个,所以 $\varphi(6^n)=\frac{1}{3}\times 6^n=2\times 6^{n-1}$,即数列 $\{\varphi(6^n)\}$ 是首项为 2,公比为 6 的等比数列,所以 $S_{12}=\frac{2(6^{12}-1)}{6-1}=\frac{2}{5}(6^{12}-1)$.

9. AC 【解析】本题考查直线与圆的位置关系,考查数学运算的核心素养.

对于 A,因为圆心 $C(1,2)$ 在直线 $y=kx+1$ 上,所以 $2=k+1$,解得 $k=1$,A 正确;

对于 B,因为直线 l_2 恒过点 $(0,2)$, $(0-1)^2+(2-2)^2<6$,即点 $(0,2)$ 在圆 C 内,所以 l_2 与圆 C 相交,B 错误;

对于C,因为 $l_1 /\!/ l_2$,则 $m=k$,$kx-y+1=0$ 与 $kx-y+2=0$ 之间的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $k=\pm 2$,C正确;无界学习公众号

对于D,因为圆心 $C(1,2)$ 到直线 $x+y-1=0$ 的距离 $d_2=\frac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$,所以 $|MN|=2\sqrt{6-(\sqrt{2})^2}=4$,D错误.

10. ABC 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

对于A,由 $1000\times(1-18\%)=820$,知30岁以上人群拥有汽车的人数为820,故A错误;

对于B,由图得不出40~45岁之间的人群拥有汽车的人数最多,故B错误;

对于C,55岁以上人群每年购买车险的总费用约为 $1000\times17\%\times3100=527000$ 元,18~30岁之间的人群每年购买车险的总费用约为 $1000\times18\%\times2800=504000$ 元,故C错误;

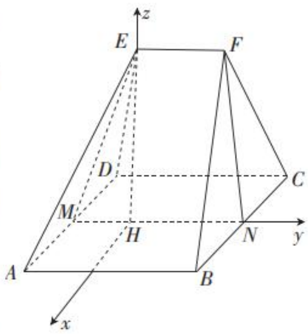
对于D,40~55岁之间的人群每年购买车险的总费用约为 $1000\times40\%\times3900=1560000$ 元,$1560000>527000+504000$,故D正确.

11. AC 【解析】本题考查几何体中线面垂直、夹角与距离,考查直观想象的核心素养.

对于A,因为 $EA=ED$,M 是 AD 的中点,所以 $EM\perp AD$. 又因为底面 $ABCD$ 是矩形,点 N 是 BC 的中点,所以 $MN\perp AD$. 因为 $MN\cap EM=M$,所以 $AD\perp$ 平面 $EFNM$,所以A正确.

由A的结论知,平面 $ABCD\perp$ 平面 $EFNM$,平面 $ABCD\cap$ 平面 $EFNM=MN$,

因为 $EH\perp MN$,所以 $EH\perp$ 平面 $ABCD$,建立如图所示的空间直角坐标系,在 $\mathrm{Rt}\triangle EMH$ 中,$MH=3$,$EM=6$,$\angle EMH=\frac{\pi}{3}$,$EH=3\sqrt{3}$,则 $M(0,-3,0)$,$E(0,0,3\sqrt{3})$,$B(3,9,0)$,$F(0,6,3\sqrt{3})$,所以 $\overrightarrow{ME}=(0,3,3\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BF}=(-3,-3,3\sqrt{3})$. 设直线 EM 与 BF 所成角为 θ,则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{ME}||\overrightarrow{BF}|}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以B错误,C正确.



对于D,$\overrightarrow{HE}=(0,0,3\sqrt{3})$,$\overrightarrow{EF}=(0,6,0)$,$\overrightarrow{FB}=(3,3,-3\sqrt{3})$,设平面 $ABEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=6y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=3x+3y-3\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(3,0,\sqrt{3})$,所以 $d=\left|\frac{\overrightarrow{HE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{9}{2\sqrt{3}}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以D错误.

12. BC 【解析】本题考查抛物线的定义及性质,考查直观想象的核心素养.

由题意可知,过 P 所作圆的两条切线关于直线 $x=1$ 对称,所以 $k_{PA}+k_{PB}=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_P,y_P)$,则 $k_{PA}=\frac{y_P-y_1}{x_P-x_1}=\frac{y_P-y_1}{\frac{y_P^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_P+y_1}$,

同理可得 $k_{PB}=\frac{2p}{y_P+y_2}$,$k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}$,则 $\frac{2p}{y_P+y_1}+\frac{2p}{y_P+y_2}=0$,得 $\frac{2p(y_1+y_2+2y_P)}{(y_P+y_1)(y_P+y_2)}=0$,所

以 $y_1+y_2=-2y_P$，由 $k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=\dfrac{2p}{-2y_P}=-1$，得 $y_P=p$.

将 $(1,p)$ 代入抛物线 C 的方程，得 $p^2=2p$，解得 $p=2$，故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，A 错误，B 正确.

设 $\angle MNF=\theta$，作 MM' 垂直准线于 M'（图略），由抛物线的性质可得 $|MM'|=|MF|$，

所以 $\dfrac{|MN|}{|MF|}=\dfrac{|MN|}{|MM'|}=\dfrac{1}{\cos\theta}$，当 $\cos\theta$ 最小时，$\dfrac{|MN|}{|MF|}$ 的值最大，

所以当直线 MN 与抛物线 C 相切时，θ 最大，即 $\cos\theta$ 最小. 由题意可得 $N(-1,0)$，

设切线 MN 的方程为 $x=my-1$，联立方程组 $\begin{cases}x=my-1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4my+4=0$，由 $\Delta=16m^2-16=0$，可得 $m=\pm1$，将 $m=\pm1$ 代入 $y^2-4my+4=0$，可得 $y=\pm2$，所以 $x=1$，即 M 的坐标为 $(1,\pm2)$，所以 $|MN|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$|MM'|=1-(-1)=2$，所以 $\dfrac{|MN|}{|MF|}$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，C 正确，D 错误.

13\. $\dfrac{2\pi}{3}$ **【解析】本题考查平面向量的夹角，考查数学运算的核心素养.**

因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=-1$，所以 $\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

14\. -2；$-\dfrac{18}{11}$ **【解析】本题考查导数的几何意义，考查数学运算的核心素养.**

设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-x_0+2)$，因为 $y'=3x^2-1$，所以 $3x_0^2-1=\dfrac{x_0^3-x_0+2-18}{x_0}$，即 $3x_0^3-x_0=x_0^3-x_0-16$，解得 $x_0=-2$，所以切线方程为 $y=11x+18$，可知该切线在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{18}{11}$.

15\. 36π **【解析】本题考查三棱柱的外接球的表面积，考查直观想象的核心素养.**

由题设知 AB,AC,AA_1 两两垂直，设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$，解得 $R=3$，所以所求外接球的表面积 $S=4\pi R^2=36\pi$.

16\. 180 **【解析】本题考查排列组合的知识，考查数学建模与数学运算的核心素养.**

若 A 与其他一人参加同一个项目，则有 $C_3^1C_4^1A_3^3=72$ 种；若 A 独自一人参加一个项目，则有 $C_3^1C_4^2A_3^3=108$ 种. 故共有 $72+108=180$ 种不同的安排方案.

17\. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $S_5=45$，所以 $5a_3=45$，解得 $a_3=9$. …………………… 2 分

又 $a_2=7$，所以 $d=a_3-a_2=2$， …………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=2n+3$. …………………………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $b_n=\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+5}\right)$， ……………………………… 7 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})=\frac{n}{5(2n+5)}$. ······················ 9 分

由 $\frac{m}{5(2m+5)}=\frac{2}{25}$,解得 $m=10$. ·· 10 分

评分细则:

【1】第一问,求出 $a_3=9$,得 2 分,求出 $d=a_3-a_2=2$,累计得 4 分,第一问全部正确解出,累计得 5 分.

【2】第二问,求出 $b_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})$,累计得 7 分,求出 $T_n=\frac{n}{5(2n+5)}$,累计得 9 分,最后求出 $m=10$,累计得 10 分.

【3】采用其他方法,参照本评分标准依步骤给分.

18. 解:(1)因为 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x-1=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$, ·· 3 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π. ··· 4 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.解得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$. ····································· 6 分

(2)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$. ·· 8 分

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(2x-\frac{\pi}{4})\leqslant 1$.所以 $-1\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. ·· 10 分

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时,$f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.无界学习公众号

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$,此时 $x=\frac{3\pi}{8}$. ··· 12 分

评分细则:

【1】第一问,将 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x-1$ 化简为 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$,得 3 分,求出最小正周期,累计得 4 分,第一问全部正确解出,累计得 6 分.

【2】第二问,求出 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$,累计得 8 分,求出 $-1\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$,累计得 10 分,最后求出正确答案,累计得 12 分.

19. 解:(1)由题意可知,$(0.006\times 2+a+0.012+0.026+0.04)\times 10=1$,解得 $a=0.01$. ··· 2 分

$\mu=(45+95)\times 0.06+55\times 0.12+65\times 0.4+75\times 0.26+85\times 0.1=69$. ················· 4 分

(2)设参加知识竞赛的每位学生获得的学校食堂消费券为 Y 元,

$P(Y=0)=P(X\leqslant 57)=0.5-\frac{0.6827}{2}=0.15865$, ·· 5 分

$P(Y=5)=P(57<X\leqslant 81)=0.6827$, ………………………………………… 6 分

$P(Y=10)=P(81<X\leqslant 93)=\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$, ………………………… 7 分

$P(Y=15)=P(X>93)=\dfrac{1-0.9545}{2}=0.02275$, ………………………………… 8 分

Y 的分布列如下表：

Y	0	5	10	15
P	0.15865	0.6827	0.1359	0.02275

……………………………………………………………………………… 10 分

$E(Y)=5\times 0.6827+10\times 0.1359+15\times 0.02275=5.11375$, ……………………… 11 分

$1000\times 5.11375=5113.75\approx 5114$(元)，

故估计全校 1000 名学生参加知识竞赛共可获得食堂消费券 5114 元. ……………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，求出 $a=0.01$，得 2 分，求出 $\mu=69$，累计得 4 分.

【2】第二问，每求出一个概率得 1 分，正确写出分布列累计得 10 分，正确写出期望累计得 11 分，直至最后写出正确结果为 5114 元，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

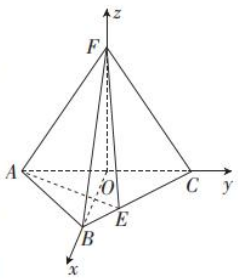
20.(1)证明：连接 OB，因为$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle B=90^\circ$，$AB=2\sqrt{2}$，

所以 $AC=4$，$OB=2$. ………………………………………… 1 分

在等边三角形 FAC 中，$FO\perp AC$，$FO=4\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$. ……… 2 分

又 $FB=4$，所以 $FO^2+OB^2=FB^2$，即 $FO\perp OB$. ………………… 4 分

因为 $AC\cap OB=O$，所以 $FO\perp$平面 ABC. ………………………… 5 分



(2)解：以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OF}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，无界学习公众号

则 $A(0,-2,0)$，$E(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},0)$，$F(0,0,2\sqrt{3})$，………………………………… 6 分

$\overrightarrow{AF}=(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3},0)$. ………………………………… 7 分

设平面 FAE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0,\\ \dfrac{4x}{3}+\dfrac{8y}{3}=0,\end{cases}$令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. …………………… 10 分

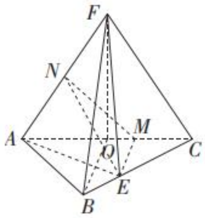
易知平面 FAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ………………………………… 11 分

设二面角 $E-FA-C$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 12 分

评分细则：

(方法二)(1)同上(1). ………………………………………………………… 5 分

(2)作 $EM\perp AC$,垂足为 M,作 $MN\perp AF$,垂足为 N,连接 EN. …… 6 分



易证 $EM\perp$平面 ACF,从而 $EM\perp AF$. 又 $MN\perp AF$,$MN\cap EM=M$,所以 $AF\perp$平面 EMN,则 $AF\perp EN$,所以二面角 $E-FA-C$ 的平面角为 $\angle ENM$. ………………………… 7 分

因为 $EM/\!/OB$,所以$\dfrac{EM}{OB}=\dfrac{EC}{BC}=\dfrac{2}{3}$,解得 $EM=\dfrac{4}{3}$. ………………… 9 分

在 Rt$\triangle AMN$ 中,$\angle FAC=60°$,$AM=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$,所以 $MN=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,……… 10 分

所以 $EN=\sqrt{(\dfrac{4}{3})^2+(\dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2}=\dfrac{8}{3}$, ………………………………………… 11 分

所以 $\cos\angle ENM=\dfrac{MN}{EN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,即二面角 $E-FA-C$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………… 12 分

21. 解:(1)因为$\triangle ABF_2$ 的周长为 8,所以 $4a=8$,解得 $a=2$. ………………………… 2 分

将点$(-1,\dfrac{3}{2})$的坐标代入椭圆方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,解得 $b=\sqrt{3}$. ………………………… 3 分

所以椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$,设直线 l 的方程为 $x=my-1$,

则圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$. ………………………………………… 5 分

由$|CD|=2\sqrt{4-d^2}\in[2\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{33}}{3}]$,可得 $m^2\in[0,2]$. ………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 消去 x 得$(4+3m^2)y^2-6my-9=0$,

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{4+3m^2}$,$y_1y_2=-\dfrac{9}{4+3m^2}$, ………………………………………… 7 分

所以 $S_{\triangle ABF_2}=\dfrac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=12\sqrt{\dfrac{m^2+1}{(4+3m^2)^2}}$. …… 8 分

设 $t=m^2+1\in[1,3]$,则 $S_{\triangle ABF_2}=12\sqrt{\dfrac{t}{(1+3t)^2}}=12\sqrt{\dfrac{1}{9t+\dfrac{1}{t}+6}}$,

易知 $h(t)=9t+\dfrac{1}{t}+6$ 在$[\dfrac{1}{3},+\infty)$上单调递增,从而 $h(t)$在$[1,3]$上单调递增, …… 10 分

因为 $16\leqslant h(t)\leqslant\dfrac{100}{3}$,所以 $S_{\triangle ABF_2}\in[\dfrac{6\sqrt{3}}{5},3]$. ………………………… 12 分

评分细则:

【1】第一问,求出 $a=2$,得 2 分,求出 $b=\sqrt{3}$,累计得 3 分,求出标准方程累计得 4 分.

【2】第二问,求出 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,累计得 5 分,求出 $m^2\in[0,2]$,累计得 6 分,根据韦达定理写

出 $y_1+y_2=\frac{6m}{4+3m^2}$，$y_1y_2=-\frac{9}{4+3m^2}$，累计得 7 分，求出 $S_{\triangle ABF_2}=12\sqrt{\frac{m^2+1}{(4+3m^2)^2}}$，累计得 8 分，直到给出正确结论，累计得 12 分.

【3】第二问，直线 l 的方程也可以设为 $y=k(x+1)$ 和 $x=-1$，参照上述步骤给分.

22.(1)解：若 $a=0$，则 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2(x>0)$，$f'(x)=x\ln x$. ························ 1 分

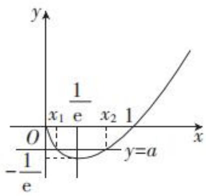
令 $f'(x)>0$，得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，··· 3 分

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{4}$. ·· 4 分

(2)证明：$f'(x)=x\ln x-a$，因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，所以 x_1,x_2 是 $x\ln x-a=0$ 的两个根，即 $a=x_1\ln x_1=x_2\ln x_2$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2\ln x_1-\frac{1}{4}x_1^2-ax_1+\frac{1}{2}x_2^2\ln x_2-\frac{1}{4}x_2^2-ax_2=-\frac{1}{2}x_1^2\ln x_1-\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2\ln x_2-\frac{1}{4}x_2^2=-\frac{1}{2}x_1x_2\ln x_2-\frac{1}{2}x_1x_2\ln x_1-\frac{1}{4}(x_2^2+x_1^2)=-\frac{1}{4}[2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2]$. ① ·· 6 分

令 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=\ln x+1$，当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=-\frac{1}{e}$，则 $-\frac{1}{e}<a<0$，$g(x)=x\ln x$ 的图象如图所示. ·· 7 分



不妨设 $0<x_1<\frac{1}{e}<x_2<1$，$\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$.

则 $x_1\ln x_1=x_1t\ln(x_1t)$，所以 $\ln x_1=\frac{t\ln t}{1-t}$，

所以 $\ln(x_1x_2)=2\ln x_1+\ln t=\frac{2t\ln t}{1-t}+\ln t=\frac{(t+1)\ln t}{1-t}<0$，

所以 $2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2<(x_1+x_2)^2$，② ·· 8 分

下面要证 $x_1+x_2<1$.

$x_2+x_1<1\Leftrightarrow(1+t)x_1<1\Leftrightarrow\ln[(1+t)x_1]<0\Leftrightarrow\ln(1+t)+\ln x_1<0\Leftrightarrow\frac{t\ln t}{1-t}+\ln(1+t)<0\Leftrightarrow\frac{\ln t}{t-1}>\frac{\ln(1+t)}{t}$. ··· 9 分

令 $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$，令 $v(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$，则 $v'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}<0$，所以 $v(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $v(x)<v(0)=0$，从而 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，··············· 10 分

所以 $h(t)<h(t-1)$，即 $\dfrac{\ln t}{t-1}>\dfrac{\ln(1+t)}{t}$，

所以 $x_1+x_2<1$，③ ………………………………………………………………… 11 分

由②知 $2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2<1$，所以 $-\dfrac{1}{4}[2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2]>-\dfrac{1}{4}$，

即 $f(x_1)+f(x_2)>-\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………………………… 12 分

评分细则：无界学习公众号

【1】第一问，写出 $f'(x)=x\ln x$，得 1 分，求出 $f(x)$ 的单调区间，累计得 3 分，求出最小值为 $-\dfrac{1}{4}$，累计得 4 分.

【2】第二问，写出 $f(x_1)+f(x_2)=-\dfrac{1}{4}[2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2]$，累计得 6 分，推导出 $2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2<(x_1+x_2)^2$，累计得 8 分，分析出要证 $\dfrac{\ln t}{t-1}>\dfrac{\ln(1+t)}{t}$，累计得 9 分，证出 $x_1+x_2<1$，累计得 11 分，直至证出 $f(x_1)+f(x_2)>-\dfrac{1}{4}$，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.