

## 高二数学(理科)试题

注意事项:

1. 本试题共 4 页, 满分 150 分, 时间 120 分钟.
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上.
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
4. 考试结束后, 监考员将答题卡按顺序收回, 装袋整理; 试题不回收.

### 第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 复数  $z = \frac{i^4 - 4i}{1+i}$  的实部与虚部之和为

- A. -4                      B. -1                      C. 1                      D. 4

2. 设  $A, B$  为两个事件, 已知  $P(A) = \frac{2}{3}, P(AB) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(B|A) =$

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{2}{9}$                       D.  $\frac{2}{3}$

3. 已知随机变量  $\eta$  的分布列为  $P(\eta=i) = \frac{ai}{4} (i=1, 2, 3, 4)$ , 则  $P(\eta=3) =$

- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{3}{10}$                       D.  $\frac{1}{3}$

4. 用数学归纳法证明  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{11}{34}$  时, 由  $k$  到  $k+1$ , 不等式左边的变化是

- A. 增加  $\frac{1}{2(k+1)}$  项                      B. 增加  $\frac{1}{2k+1}$  和  $\frac{1}{2k+2}$  两项  
 C. 增加  $\frac{1}{2k+1}$  和  $\frac{1}{2k+2}$  两项同时减少  $\frac{1}{k+1}$                       D. 以上结论都不对

5. 函数  $f(x) = \frac{x}{e^x}$  在  $[0, 2]$  上的最大值是

A.  $\frac{1}{e}$

B.  $\frac{1}{e^2}$

C. 0

D.  $\frac{1}{2\sqrt{e}}$

6. 由变量  $x$  和  $y$  相对应的一组数据  $(3, y_1), (5, y_2), (7, y_3), (12, y_4), (13, y_5)$  得到的线性

方程为  $y = \frac{1}{2}x + 20$ , 则  $\sum_{i=1}^5 y_i =$

A. 25

B. 125

C. 120

D. 24

7. 已知随机变量  $\zeta$  服从正态分布  $N(0, \delta^2)$ , 若  $P(\zeta > 2) = 0.023, P(-2 \leq \zeta \leq 2) =$

A. 0.477

B. 0.628

C. 0.954

D. 0.977

8.  $\int_1^a (2x + \frac{1}{x}) dx = 3 + \ln 2$ , 则实数  $a$  的值是

A. 6

B. 4

C. 3

D. 2

9.  $(3x-2)(x-1)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为

A. 85

B. 5

C. -5

D. -85

10. 某一随机变量  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	0.1	$m$	$2n$	0.1

则  $mn$  的最大值为

A. 0.2

B. 0.8

C. 0.08

D. 0.6

11. 设函数  $f(x) = x^2 + m \ln(1+x)$  有两个极值点, 则实数  $m$  的取值范围是

A.  $(-1, \frac{1}{2})$

B.  $(0, \frac{1}{2})$

C.  $(0, \frac{1}{2}]$

D.  $(-1, \frac{1}{2}]$

12. 若函数  $f(x)$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  都有  $f'(x) > f(x)$  成立, 则

A.  $3f(\ln 2) > 2f(\ln 3)$

B.  $3f(\ln 2) = 2f(\ln 3)$

C.  $3f(\ln 2) < 2f(\ln 3)$

D.  $3f(\ln 2)$  与  $2f(\ln 3)$  的大小不确定

## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

13. 由直线  $x=0, x=2$ , 曲线  $y=e^x$  及  $x$  轴所围成图形的面积是\_\_\_\_\_.

14. 设  $X \sim B(3, p)$ , 且  $P(X=2) = \frac{54}{125}$ , 则  $p$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 复数  $z$  满足  $(z-3)(2-i) = 5$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  的共轭复数  $\bar{z} =$ \_\_\_\_\_.

16. 摄影师要为 5 名学生和 2 位老师拍照, 要求排成一排, 2 位老师相邻且不排在两端, 不同的排法共有 \_\_\_\_\_ 种.

17. 已知函数  $f(x) = ax^2 - e^x$  有三个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 65 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 18 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 52 分.

18. (本小题满分 13 分)

已知  $(2x^2 - \frac{1}{x})^n (n \in \mathbb{N}^+)$  的展开式中各项的二项式系数和为 64.

(I) 求展开式中二项式系数最大的项;

(II) 求  $(2-x^3)(2x^2 - \frac{1}{x})^n$  展开式中的常数项.

19. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = a \ln x + \frac{2a^2}{x} + x (a \neq 0)$ , 若曲线  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $x - 2y = 0$  垂直.

(I) 求实数  $a$  的值;

(II) 当  $a < 0$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间.

20. (本小题满分 13 分)

某单位开展职工文体活动, 其中跳棋项目比赛分为初赛和决赛, 经过初赛, 甲、乙、丙三人进入决赛. 决赛采用以下规则: ① 抽签确定先比赛的两人, 另一人轮空, 后面每局比赛由前一局胜者与轮空者进行, 前一局负者轮空; ② 甲、乙进行比赛, 甲每局获胜的概率为  $\frac{2}{3}$ , 甲、丙进行比赛, 甲每局获胜的概率为  $\frac{1}{2}$ , 乙、丙进行比赛, 乙每局获胜的概率为  $\frac{3}{4}$ ; ③ 先取得两局胜者为比赛冠军, 比赛结束. 假定每局比赛无平局且每局比赛互相独立. 通过抽签, 第一局由甲、乙进行比赛.

(I) 求甲获得冠军的概率;

(II) 记比赛结束时乙参加比赛的局数为  $\zeta$ , 求  $\zeta$  的分布列和数学期望.



21. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - mx^2$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}mx^2 + x$ ,  $m \in \mathbf{R}$ , 令  $F(x) = f(x) + g(x)$ .

(I) 当  $m = \frac{1}{2}$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间及极值;

(II) 若关于  $x$  的不等式  $F(x) \leq mx - 1$  恒成立, 求整数  $m$  的最小值.

(二) 选考题: 共 13 分. 考生从 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 13 分)【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

已知圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sin \theta$ , 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 点  $A$  的极坐

标为  $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ , 设直线  $l$  与圆  $C$  交于  $P, Q$  两点.

(I) 求圆  $C$  的直角坐标方程;

(II) 求  $|AP| \cdot |AQ|$  的值.

23. (本小题满分 13 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数  $f(x) = 2|x-1| - 3|x+2|$ .

(I) 求不等式  $f(x) < -x^2 - x + 1$  的解集;

(II) 若存在实数  $x$ , 使不等式  $3a^2 - 7a - |x+2| < f(x)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.