2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学文科冲刺卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{-1,2,4,5\}$，设 $A\cup B=U$，则 $\complement_U(A\cap B)=$

A. $\{-2,-1,2,3,5\}$　　B. $\{-1,2,4,5\}$

C. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　D. $\{-2,0,1,3,4,5\}$

2. 已知复数 z 满足 $z\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$（其中 i 为虚数单位），则 $\bar{z}=$

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $-1-2\mathrm{i}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,4)$，$\boldsymbol{b}=(x,8)$，若 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. 5　　B. $\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{17}$　　D. $\sqrt{145}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$，则此双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$

5. 已知命题 P：“若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$，命题 Q：“过点 $P(3,1)$ 能作圆 $(x-1)^2+y^2=6$ 的两条切线”，则下列命题一定为真命题的是

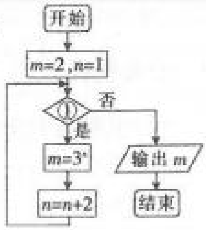
A. $P\wedge Q$　　B. $P\vee Q$

C. $\neg P\vee Q$　　D. $\neg P\wedge Q$

6. 已知 $\sin(\frac{4\pi}{3}+\alpha)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 执行如图所示的程序框图，要使输出的结果为 $m=243$，则①中应填的条件可以为



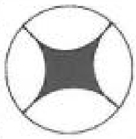
A. $n\leqslant 3$?

B. $n\leqslant 4$?

C. $n\leqslant 5$?

D. $n\geqslant 6$?

8. 独具特色的中国古建筑凝聚了历代工匠们的智慧，与其他艺术门类(如书法、水墨画等)不同的是，在中国古建筑体系中，突出运用了严谨的“数学方法”和精妙的“数学之美”. 右图中的图案是我国古代建筑中的一种装饰图案，形若钱币，寓意富贵吉祥，现向该圆形区域随机撒 $m(m\in\mathbf{N}^*)$ 粒芝麻，则落在阴影区域(阴影部分由四条四分之一圆弧围成)的芝麻的粒数约为

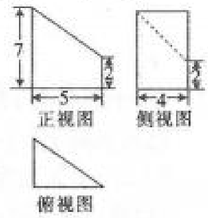


A. $\dfrac{m}{4}$　　B. $\dfrac{m}{5}$　　C. $\dfrac{2\pi-4}{\pi}m$　　D. $\dfrac{4-\pi}{\pi}m$

9. 对任意的实数 x，不等式 $ax(x-1)<1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $[-4,0)$　　C. $(-4,0]$　　D. $(-\infty,-4]$

10. 如图所示是某几何体的三视图，则该几何体的体积为



A. $\dfrac{64}{3}$

B. $\dfrac{160}{3}$

C. $\dfrac{163}{3}$

D. 64

11. 若存在实数 m 使得函数 $f(x)=\sin x(\sin x-\cos x)$ 在区间 $[2,m]$ 上单调递减，则实数 m 的取值范围是

A. $(2,\dfrac{7\pi}{8}]$　　B. $(2,\dfrac{9\pi}{8}]$　　C. $(2,\dfrac{11\pi}{8}]$　　D. $(2,\dfrac{4\pi}{3}]$

12. 已知正四面体 $S-ABC$ 内切球的表面积为 2π，则它的外接球的表面积为

A. $6\sqrt{3}\pi$　　B. 18π　　C. 20π　　D. $12\sqrt{3}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卷中的横线上.

13. 给定一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，当 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 满足 $|x_i-\bar{x}|\leqslant 5$(其中 $\bar{x}$ 为这组数据的平均数)时，称 x_i 为这组数据的一个“好数据”. 如图所示是在甲、乙两个班中各抽取的 5 名学生的某次考试成绩的茎叶图，由茎叶图可知，甲、乙两组数据的“好数据”之和为________.

甲		乙
3	6	9
6 2	7	2 9
3	8	8
6	9	7

14. 实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 1\\x-y\leqslant 0\\2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x-y$ 的最小值为________.

15. 已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $(b+2c)\cos A=-a\cos B$，设 D 为 BC 的中点，$b=4$，$AD=\sqrt{7}$，则 $c=$________.

16. 已知点 $P(1,2)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，过抛物线的焦点 F 作直线 l(l 的斜率存在)交抛物线于 A,B 两点，则 $|AF|+2|BF|$ 的最小值为________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共60分.

17.(本小题满分12分)

设数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，其前n项和为S_n，若$S_3=12$，且满足a_1,a_2,a_6成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

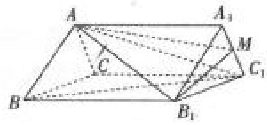
(2)设$b_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，求数列$\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$的前$n$项和$T_n$.

18.(本小题满分12分)

如图所示，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，M为棱A_1C_1的中点.

(1)求证：BC_1∥平面AB_1M.

(2)若$AA_1\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，
求点B到平面AB_1M的距离.



19.(本小题满分 12 分)

随着经济的不断发展和人们消费观念的不断提升,越来越多的人日益喜爱旅游观光,这也为国像旅游事业的飞速发展创造了有利的条件.某人想在 2019 年 5 月到某景区 A 旅游观光,为了避开旅游高峰拥挤,方便出行,他收集了最近 5 个月该景区的观光人数的数据见下表:

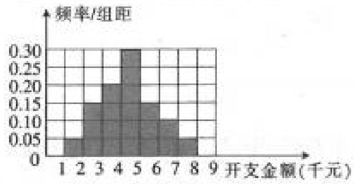
月份	2018.12	2019.1	2019.2	2019.3	2019.4
月份编号 t	1	2	3	4	5
旅游观光人数 y(百万人)	0.5	0.6	1	1.4	1.7

(1)由收集数据的三点图发现,可用线性回归模型拟合旅游观光人数 y(百万人)与月份编号 t 之间的相关关系,请用最小二乘法求 y 关于 t 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$,并预测 2019 年 5 月景区 A 的旅游观光人数;

(2)从调查的 200 人中随机抽取 1 名游客,求该游客的支出金额小于 5 千元的概率;

(3)当地旅游局为了预测景区 A 给当地的财政带来的收入状况,从 2019 年 4 月的旅游观光人群中随机抽取了 200 人,并对他们旅游观光过程中的开支情况进行了调查,得到如下频率分布表和频率分布直方图:

开支金额(千元)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8]
频数	10	30	40	60	30	20	10



假设所有游客消费总额的 20%将纳入当地旅游局的财政收入,请根据 2019 年 4 月份抽样调查的旅游观光的开支情况为依据,预测 2019 年 5 月份当地旅游局可获得的收入大约是多少?

(参考公式:①$\hat{y}=bx+a$,其中 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$,$a=\bar{y}-b\bar{x}$)

20.(本小题满分12分)

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，$P(-\sqrt{3},0)$是它的一个顶点.

(1)求椭圆E的标准方程;

(2)若直线$l:y=kx+m$与椭圆E相交于M,N两点,点O为坐标原点,求$\triangle MON$面积的最大值.

21.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=(x^2-2x)\ln x$，$g(x)=x-ax^2$，若函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线l与$g(x)$的图象也相切.

(1)求l的方程和a的值;

(2)当$x\in(\frac{1}{e},e)$时,若关于x的不等式$f(x)-x^2\ln x\leqslant ax^2+kx+3$有解,求$k$的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](本小题满分10分)

已知曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{5}\cos\alpha\\ y=-\frac{1}{2}+\sqrt{5}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),以平面直角坐标系的原点为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)将曲线C的参数方程化为极坐标方程;

(2)设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}+t\cos\alpha\\ y=-\frac{3}{2}+t\sin\alpha\end{cases}$(其中$t$为参数).若$l$与曲线$C$相交于$A$、$B$两点,且$|AB|=\sqrt{19}$,求直线$l$的斜率.

23.[选修4—5:不等式选讲](本小题满分10分)

已知函数$f(x)=|x+2|-|3x-6|$.

(1)在平面直角坐标系中画出函数$f(x)$的图象;

(2)若对$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)\leqslant m$恒成立,设$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且$a+b+c=\frac{5}{4}m$,求证:$\sqrt{3a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant 5$.

2019 年普通高等学校招生全国统一考试
数学文科冲刺卷参考答案

（三）

1. D　本题考查集合的交、并、补运算. 由题意 $U=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$,
$A\cap B=\{-1,2\}$，所以 $\complement_U(A\cap B)=\{-2,0,1,3,4,5\}$.

2. A　本题考查复数的四则运算和复数相关的基本概念. 由 $zi=2+i$，可得 $z=\frac{2+i}{i}=-i(2+i)=1-2i$，所以复数 z 的共轭复数是 $1+2i$.

3. C　本题考查共线向量，向量的数量积和向量的模等基本概念.
由 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 可知，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $(-1)\times 8-4x=0$，解得 $x=-2$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-4)$，
所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$.

4. D　本题考查双曲线的渐近线方程. 由题意 $\frac{\sqrt{-m+3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，解得 $m=-2$，所以双曲线的方程为 $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{2}=1$，其渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

5. C　本题考查含逻辑联接词的命题的真假判断. 命题 P 为假命题，只有当函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义时，才有 $f(0)=0$，命题 Q 为假命题，因为 $(3-1)^2+1^2<6$，即点 $P(3,1)$ 在圆内，即过点 $P(3,1)$ 不能作圆的切线. 所以 A、B、C、D 四个选项中只有选项 C 为真命题.

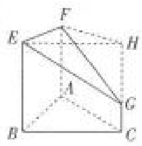
6. A　本题考查诱导公式. 由题意，$\sin(\frac{4\pi}{3}+\alpha)=\sin[\pi+(\frac{\pi}{3}+\alpha)]=-\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，
所以 $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}+\alpha)]=\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. C　本题考查程序框图的理解. 执行第一次循环，$m=3,n=3$；执行第二次循环，$m=27,n=5$；执行第三次循环，$m=243,n=7$. 故要使得输出的结果为 $m=243$，则①中应填的条件可以为 $n\leqslant 5$.

8. D　本题考查数学文化与几何概型. 设圆的半径为 r，则 $S_{阴影区域}=\pi r^2-2(\pi r^2-\sqrt{2}r\cdot\sqrt{2}r)=4r^2-\pi r^2=(4-\pi)r^2$，故向圆形区域随机撒 m 粒芝麻，落在阴影区域的芝麻的粒数为 $\frac{(4-\pi)r^2}{\pi r^2}m=\frac{4-\pi}{\pi}m$.

9. C　本题考查不等式恒成立问题. 当 $a=0$ 时，$ax^2-ax-1=-1<0$，不等式成立；设 $f(x)=ax^2-ax-1$，当 $a\neq 0$ 时，函数 $f(x)$ 为二次函数，$f(x)$ 要恒小于 0，抛物线开口向下且与 x 轴没有交点，即 $\begin{cases}a<0\\ \Delta=a^2+4a<0\end{cases}$，解得 $-4<a<0$，综上实数 $a\in(-4,0]$.

10. B　本题考查三视图与几何体的体积的计算问题. 由三视图可知，该几何体的直观图为如图所示的高为 7 的直三棱柱 $ABC-EFH$ 截去一个三棱锥 $F-EHG$ 后剩余的几何体，故可得所求几何体的体积为 $V=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times 7-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 5\times 5\times 4=\frac{160}{3}$.

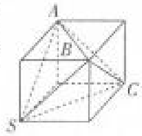


11. B　本题考查三角函数的性质. $f(x)=\sin x(\sin x-\cos x)=\sin^2 x-\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

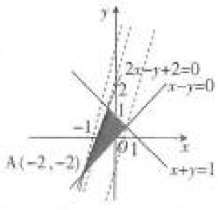
解得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$，

取 $k=1$，得 $f(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8}]$ 上单调递减，所以 $[2,m]\subseteq[\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8}]$，所以实数 m 的取值范围是 $(2,\frac{9\pi}{8}]$.



12. B　本题考查简单几何体的内切球与外接球的综合问题. 如图所示，将四面体 $S-ABC$ 放在如图所示的正方体中，设正方体的棱长为 a，则该正四面体的棱长为 $\sqrt{2}a$，设内切球的半径为 r，则 $4\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times r=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}$，可得 $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，
由题意知 $4\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2=2\pi$，解得 $a=\sqrt{6}$，故正四面体 $S-ABC$ 的外接球的半径为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即外接球的表面积为 $S=4\pi\times(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=18\pi$.

13. 238　本题考查茎叶图. 由茎叶图可得 $\bar{x}_{甲}=\frac{63+72+76+83+96}{5}=78$，$\bar{x}_{乙}=\frac{69+72+79+88+97}{5}=81$，
由题意，甲的“好数据”为 76，83，乙的“好数据”为 79，甲、乙两组数据的“好数据”之和为 $76+83+79=238$.



14. -4　本题考查线性规划. $z=3x-y$ 可变形为截距式 $y=3x-z$，画出可行域如图所示，由图可知，当目标函数过边界直线 $2x-y+2=0$ 和 $x-y=0$ 的交点 $A(-2,-2)$ 时，z 最小，且 $z_{\min}=3\times(-2)-(-2)=-4$.

15. 6　本题考查解三角形. 由条件 $(b+2c)\cos A=-a\cos B$，可得 $(\sin B+2\sin C)\cos A=-\sin A\cos B$，即 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=-2\sin C\cos A$，所以 $\sin(A+B)=\sin C=-2\sin C\cos A$，因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. 因为 D 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=4\overrightarrow{AD}^2$，则有 $c^2+b^2+2bc\cos A=4\cdot AD^2$，代入数据可解得 $c=6$.

16. $2\sqrt{2}+3$　本题考查抛物线的性质和基本不等式. 已知抛物线的方程为 $y^2=4x$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，联立方程 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=k(x-1),\end{cases}$ 解得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，$x_1x_2=1$，由抛物线的性质可知 $|AF|+2|BF|=x_1+1+2(x_2+1)=x_1+2x_2+3\geq 2\sqrt{2x_1x_2}+3=2\sqrt{2}+3$，
当且仅当 $x_1=2x_2=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $|AF|+2|BF|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$.

17. 解：本题考查数列的通项公式和裂项相消法求数列的和.
(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，由 $S_3=12$ 可得 $a_1+a_2+a_3=12$，
所以 $3a_2=12$，即得 $a_2=4$，所以 $a_1+d=4$.　①
又因为 a_1,a_2,a_6 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1\cdot a_6$，即 $(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+5d)$，化简可得 $d^2=3a_1d$，因为 $d\neq 0$，所以 $d=3a_1$.　②
联立①②解得 $a_1=1$，$d=3$，
所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 3=3n-2$，
即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2$. ………………………………………… 6分
(2) 由 $a_n=3n-2$ 可得 $b_n=2n-1$，所以 $\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，
所以 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$，
即数列 $\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{n}{2n+1}$. ………………………………………… 12分

18. 解：本题考查线面平行和点到面的距离.
(1) 证明：连接 A_1B 交 AB_1 于点 D，连接 DM，则 D 为 A_1B 的中点，因为 M 为棱 A_1C_1 的中点，所以 $DM\parallel BC_1$. 因为 $DM\subseteq$ 平面 AB_1M，$BC_1\not\subset$ 平面 AB_1M，所以 $BC_1\parallel$ 平面 AB_1M. ………………… 4分
(2) 由 $BC_1\parallel$ 平面 AB_1M，所以点 B 到平面 AB_1M 的距离等于点 C_1 到平面 AB_1M 的距离，设所求距离为 h，
由题意，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，则 $V_{C_1-AB_1M}=V_{A-B_1C_1M}=\frac{1}{2}V_{A-A_1B_1C_1}$，
即 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1C_1}\times AA_1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AB_1M}\times h$，所以 $h=\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot AA_1}{2S_{\triangle AB_1M}}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

由已知 $AM=B_1M=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AB_1=2\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle AB_1M}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，所以 $h=\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot AA_1}{2S_{\triangle AB_1M}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ………… 12 分

19. 解：本题主要考查回归方程和统计的相关知识.

(1)由题意易知 $\bar{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{0.5+0.6+1+1.4+1.7}{5}=1.04$，

$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=55$，$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=18.8$，

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-5\bar{t}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-5\bar{t}^2}=\frac{18.8-5\times3\times1.04}{55-5\times3^2}=0.32$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=1.04-0.32\times3=0.08$，

则 y 关于 t 的回归方程为 $\hat{y}=0.32t+0.08$. 当 $t=6$ 时，$\hat{y}=2.00$，即 2019 年 5 月景区 A 的旅游观光人数为 2 百万人. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)由题意易求得所求概率为 $P=\frac{10+30+40+60}{200}=\frac{7}{10}$. ………………………………………… 7 分

(3)由频率分布直方图可得抽样调查的 200 人的开支金额的均值为

$1.5\times0.05+2.5\times0.15+3.5\times0.20+4.5\times0.30+5.5\times0.15+6.5\times0.10+7.5\times0.05=4.35$(千元)，由(1)可知，2019 年 5 月份旅游观光的人数约为 200 百万人，根据题意可知，2019 年 5 月份当地旅游局可获得的收入大约是 $4.35\times2000000\times20\%=1740000$(千元)，即 17.4 亿元. ……………………………… 12 分

20. 解：本题考查直线与椭圆的的位置关系.

(1)由题意可知 $a=\sqrt{3}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $c=\sqrt{2}$，$b=1$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

此时有 $\Delta=3k^2-m^2+1>0$. 由一元二次方程根与系数的关系，得 $x_1+x_2=\frac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{3k^2+1}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{-6km}{3k^2+1})^2-4\times\frac{3m^2-3}{3k^2+1}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1}\sqrt{12(3k^2-m^2+1)}$，

$\because$ 原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{1+3k^2}\sqrt{m^2(3k^2-m^2+1)}$，

由 $\Delta=3k^2-m^2+1>0$，又 $m\neq0$，

$\therefore S_{\triangle MON}=\frac{\sqrt{3}}{1+3k^2}\sqrt{m^2(3k^2-m^2+1)}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{1+3k^2}\cdot\frac{m^2+(3k^2-m^2+1)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $m^2=\frac{3k^2+1}{2}$ 时，不等式取等号，$\therefore\triangle MON$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 12 分

21. 解：本题考查导数的几何意义和导数恒成立问题.

(1) $f(1)=0$，$f'(x)=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\cdot\frac{1}{x}=2(x-1)\ln x+x-2$，$f'(1)=-1$，

故切线 l 的方程为 $y=-(x-1)$，即 $l: x+y-1=0$，

设直线 l 与 $g(x)$ 的图象相切于点 (x_0,y_0)，$g'(x)=1-2ax$，由题意可得 $\begin{cases}1-2ax_0=-1\\ x_0-ax_0^2=y_0\\ x_0+y_0-1=0\end{cases}$，

解得 $a=1$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注