机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2022届高三4月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查集合的运算,考查考生数学运算的核心素养.

【解析】因为 $B=\{1,2\}$,而 $A=\left\{-1,\frac{a}{2}\right\}$,$A\cap B=\{1\}$,所以 $\frac{a}{2}=1$,则 $a=2$.

2.【答案】A

【命题意图】本题考查复数的模的概念与运算,考查考生数学运算的核心素养.

【解析】由于 $|a+2i|=\sqrt{a^2+4}$,则 $|a+2i|^4=(a^2+4)^2=25$,且 a 为正整数,因此 $a=1$.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查回归直线,考查考生数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】由回归直线的计算公式,当斜率 $\hat{b}$ 已知时,截距可由 $\bar{y}=\hat{b}\bar{x}+\hat{a}$ 得出,因此可以计算得到这部电影票房的回归直线为 $y=0.25x+3.85$,将 $x=5$ 代入上述方程可以得到星期五这部电影的预测票房为5.1千万元.

4.【答案】D

【命题意图】本题考查圆的性质及其相关运算,考查考生数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】A,B 都在圆上,线段 AB 的长度为20,因此 AB 为直径.由圆的性质知 $\triangle ABC$ 为直角三角形,有一个角为 60°,因此其面积为 $50\sqrt{3}$.

5.【答案】D

【命题意图】本题考察平面直角坐标系的建立以及向量运算.

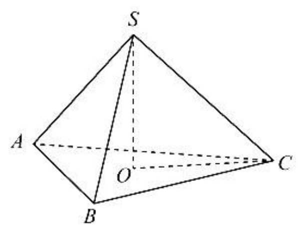
【解析】由题意可建立平面直角坐标系,令 $A=(0,1)$,$B=(0,0)$,$C=(1,0)$,则 $\overrightarrow{AC}=(1,-1)$,$\overrightarrow{BD}=n(1,-1)-(0,-1)=(n,1-n)$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2n-1=-\frac{1}{3}$,因此 $n=\frac{1}{3}$.

6.【答案】C

【命题意图】本题考查复合函数的求导与曲线某点处切线的斜率问题,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由函数的求导法则,该函数的导数为 $f'(x)=\frac{x^2(1+\ln x)+2x\ln x+x+1}{(x+1)^2}$,$f'(e)=\frac{2e+1}{e+1}$,而切线的斜率为 $\frac{2a+1}{e+1}$,因此 $2e+1=2a+1$,则 $a=e$.

7.【答案】B



【命题意图】本题考查空间想象能力、正三棱锥的性质以及空间几何体的表面积、体积计算,考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】由外接球的体积可知外接球的半径为3.正三棱锥的内切球与外接球的球心是相同的,故此正三棱锥为正四面体.因此正三棱锥的高 OS 的长度

为 4，而点 O 也为等边三角形 ABC 的中心. 如图，设正三棱锥的棱长为 a，则 OC 的长度为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$，由于 SO 与 OC 垂直，由勾股定理可以列出方程 $\frac{a^2}{3}+16=a^2$，求解得到 $a=2\sqrt{6}$. 因此这个正三棱锥的一个面的面积为 $6\sqrt{3}$，则此正三棱锥的表面积为 $24\sqrt{3}$.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的性质与运算，考查考生数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】函数的最大值为$\sqrt{\left(\cos\frac{a\pi}{4}-1\right)^2+\left(\sin\frac{a\pi}{4}\right)^2}=\sqrt{2-2\cos\frac{a\pi}{4}}=\sqrt{2}$，因此 $\cos\frac{a\pi}{4}=0$.

9.【答案】A

【命题意图】本题考查抛物线的焦点公式、两点之间距离公式，考查考生逻辑推理的核心素养.

【解析】由抛物线的性质，抛物线上的点到焦点的距离等于其到准线的距离. 该抛物线的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，设点 P 的横坐标为 m，则 $|PF|=m+\frac{1}{2}\leqslant\frac{5}{2}$，可以求解得到 $m\leqslant 2$，即只要点 P 的横坐标在区间 $[0,2]$ 即可，而横坐标的取值范围为 $[0,4]$，因此概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

10.【答案】D

【命题意图】本题考查对数函数、幂函数的性质与基本不等式，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】对题中式子进行以 a 为底的对数处理，可以得到$\log_b a+(\log_a b)^2=0$，由于$\log_a b\cdot\log_b a=1$，因此 $\log_a b=-1$，也就是说 a,b 互为倒数. 由基本不等式，得 $a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=2b$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. 而以 e 为底的指数函数是单调递增的，因此 e^{a+2b} 的最小值为 $e^{2\sqrt{2}}$.

11.【答案】A

【命题意图】本题考查三角恒等变换与函数的单调性与极值问题，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】首先由已知条件可以得到 $2\cos^2\alpha-\cos\alpha=0$，因此 $\cos\alpha=0$ 或$\frac{1}{2}$，由 α 的取值范围可知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 此时导函数为 $f'(x)=2x-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}x$. 函数的极值点即导函数为 0 的点，$f'(0)=0$，而 $f''(x)=2-\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3}x$，恒大于 0，即 $f'(x)$ 严格单调递增，因此 $f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上只有 1 个极值点.

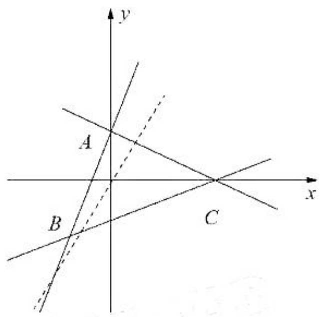
12.【答案】C

【命题意图】本题考查椭圆的性质，考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】设焦点 F_2 的坐标为 $(c,0)$，由椭圆的性质 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，不妨设 $|PF_2|=m$，则 $|PF_1|=2a-m$. F_1F_2 为直径，由圆的性质知三角形 PF_1F_2 为直角三角形，而 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{3}$，因此 $|PF_2|:|PF_1|:|F_1F_2|=m:(2a-m):2c=1:3:\sqrt{10}$，所以 $a=2m$，$c=\frac{\sqrt{10}}{2}m$，椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

二、填空题

13.【答案】-2.



【命题意图】本题考查线性规划，考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】由不等式组表示的平面区域为如图 A,B,C 三点组成的三角形. 通过观察可知当直线 $z=3x-2y$ 过点 A 时，z 有最小值，点 A 的坐标为 $(0,1)$，因此 z 的最小值为 -2.

14.【答案】$\left\{x\middle|x<2\text{ 或 }x>\frac{5}{2}\right\}$.

【命题意图】本题考查函数定义域的求法、对数运算与一元二次不等式求解，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题意知 $\log_2(2x^2-9x+14)-2>0$，而以 2 为底的对数函数是单调递增的，因此 $2x^2-9x+14>4$，求解即可得到 $x<2$ 或 $x>\frac{5}{2}$.

15.【答案】$\frac{2}{2021}$.

【命题意图】本题考查数列的递推关系，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题意可知 $na_{n+1}=2+na_n$，因此 $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{n}$，则 $a_{2022}-a_{2021}=\frac{2}{2021}$.

16.【答案】$-\sqrt{3}$.

【命题意图】本题考查逻辑推理能力与三角恒等变换的综合应用，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=(1-\cos z)^2+\sin^2 z$. 将等式两边展开，并将 $z=\frac{\pi}{3}-x-y$ 代入式中，化简得到 $\frac{3}{2}\cos(x+y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+y)$，因此 $\tan(x+y)=-\sqrt{3}$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查韦达定理、等差数列的通项公式与求和公式，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 由韦达定理可知 $a_n+a_{n+1}=-n$，$a_na_{n+1}=b_n$， ……（2分）

因此 $(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=a_{n+2}-a_n=-(n+1)-(-n)=-1$. ……（4分）

由 $a_1=10$ 可知 $a_{21}=0$， ……（5分）

因此 $b_{20}=a_{20}a_{21}=0$. ……（6分）

(2) 由 $a_1+a_2=-1$，可知 $a_2=-1-a_1=-11$， ……（7分）

而数列 $\{a_n\}$ 的偶数项为公差为 -1 的等差数列，因此 $a_{2n}=-11-(n-1)=-n-10$， ……（9分）

因此 $S_n=na_2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{-n^2-21n}{2}$， ……（11分）

因此 $S_{10}=\frac{-100-210}{2}=-155$. ……（12分）

18.【命题意图】本题考查线线垂直和线面垂直的概念与转化、二面角的计算，考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 由题意可知 $D_1D_2C_2C_1$ 为正方形，所以 $D_1C_2\perp D_2C_1$. ……（1分）

由正六边形的几何特征易知 $\triangle A_1D_1C_1$ 为直角三角形，且 $A_1C_1\perp C_1D_1$， ……（2分）

又由此几何体为正六棱柱,可知 $A_1C_1 \perp C_2C_1$, ……………………………………………………(3分)

又 $C_1C_2 \cap C_1D_1 = C_1$,因此 $A_1C_1 \perp$ 平面 $D_1D_2C_2C_1$, ……………………………………(4分)

进一步可得 $A_1C_1 \perp D_1C_2$,……………………………………………………………………………(5分)

又 $A_1C_1 \cap C_1D_2 = C_1$,因此 $D_1C_2 \perp$ 平面 $A_1C_1D_2$,即得 $D_1C_2 \perp A_1D_2$. ……………………(6分)

(2)不妨令底面正六边形的边长为 a,连接 B_2E_2,F_2D_2 相交于点 M,点 M 为 F_2D_2 的中点,则 $B_2M=\frac{3}{2}a$.

……………………………………………………………………………………………………(8分)

由 $B_1B_2 \perp$ 平面 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$,知 $B_1B_2 \perp D_2F_2$, ………………………………………(9分)

又由 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 为正六边形,易得 $B_2E_2 \perp F_2D_2$, ………………………………………(10分)

$\therefore D_2F_2 \perp$ 平面 B_1B_2M,$\therefore D_2F_2 \perp B_1M$,

因此二面角 B_1-F_2D_2-B_2 的平面角即为 $\angle B_1MB_2$, ……………………………………………(11分)

因此二面角 B_1-F_2D_2-B_2 的平面角的正切值为 $\tan\angle B_1MB_2=\frac{a}{\frac{3}{2}a}=\frac{2}{3}$. ……………………(12分)

19.【命题意图】本题考查阅读表格的能力、随机事件发生的概率、枚举法,考查考生数据分析、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)通过表格可知 $M=3960+2772+3168=3465+4158+2277=9900$, ……………………(1分)

因此该校2021届学生的就业率为 $\frac{3465+4158}{10000}\times100\%=76.23\%$. ……………………………(3分)

(2)根据表中数据可知,2021届毕业生在民营企业工作的概率为 $\frac{4158}{10000}=0.4158$, …………(4分)

$12000\times0.4158=4989.6$,因此2022届毕业生中预计有4990人在民营企业工作. …………(6分)

(3)在这5人中,将在国有单位工作的人记为 a_1,a_2,a_3,其余二人记为 b_1,b_2,基本事件空间 $\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(b_1,b_2)\}$,共10种情况,

……………………………………………………………………………………………………(9分)

将事件"其中至多有1人在国有单位工作"记为 A,则 $A=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(b_1,b_2)\}$共7种等可能情况. ……………………………………………(11分)

所以其中至多有1人在国有单位工作的概率 $P=\frac{7}{10}$. ……………………………………………(12分)

20.【命题意图】本题考查双曲线的定义及相关计算、直线与圆锥曲线的交点、点与圆的位置关系,考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)由双曲线的定义可知运动轨迹 C 为双曲线,设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. ……………(1分)

由题设条件可知 $2a=6$,$2c=10$, ……………………………………………………………………(2分)

求解可得 $a=3$,$c=5$,$b=\sqrt{c^2-a^2}$,则曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. ……………………(4分)

(2)点 Q 在 y 轴的右边. ……………………………………………………………………………(5分)

由题意,可以设 QL 连线所在直线的方程为 $y=kx+b$,且 $k\neq0$,将其与双曲线方程联立,可以得到 $(16-9k^2)x^2-18bkx-9b^2-144=0$. ……………………………………………………………(6分)

由题意可知该方程存在2个解,因此 $k\neq\pm\frac{4}{3}$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{18bk}{16-9k^2}$，

因此点 P 的横坐标为 $\dfrac{9bk}{16-9k^2}$，纵坐标为 $\dfrac{16b}{16-9k^2}$ ，…………（7分）

而点 P 的坐标为 $(9,-4)$，因此可以求解得到 $k=-4,b=32$，…………（9分）

则直线与双曲线方程的联立方程为 $8x^2-144x+585=0$，

可以求解得到点 Q 的横坐标 $x=9+\dfrac{3}{4}\sqrt{14}$ 或 $9-\dfrac{3}{4}\sqrt{14}$ ，…………（10分）

因为 $x=9+\dfrac{3}{4}\sqrt{14}>0$，且 $x=9-\dfrac{3}{4}\sqrt{14}=\dfrac{3(12-\sqrt{14})}{4}>0$，

所以点 Q 在 y 轴的右边．…………（12分）

21.【命题意图】本题考查函数导数问题、含参问题的分类讨论能力，考查考生数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x\ln x+x^2-3x$，$f'(x)=\ln x+2x-2$，…………（1分）

令 $f'(x)=0$，求解得到 $x=1$. …………（2分）

由 $\ln x$ 和 $2x$ 均为单调递增函数可知 $f'(x)$ 在定义域内单调递增，

因此 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上小于 0，在 $(1,+\infty)$ 上大于 0. …………（3分）

因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. …………（4分）

(2)由题意知 $f'(x)=\ln x+2ax-2$，$f''(x)=\dfrac{1+2ax}{x}$，…………（5分）

若 $a=0$，$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ 在定义域内恒成立，

则 $f'(x)=\ln x-2$ 在定义域内单调递增且零点为 e^2. …………（6分）

因此 $f(x)$ 在 $(0,e^2]$ 上单调递减，在 $[e^2,+\infty)$ 上单调递增，不为单调函数. …………（7分）

若 $a>0$，$f''(x)>0$ 在定义域内恒成立，$f'(x)$ 在定义域内单调递增，

由于 $f'(e^{-2a})=2a(e^{-2a}-1)-2<0$ 而 $f'(e^2)=2ae^2>0$，

因此在定义域内 $f'(x)$ 存在零点，此时 $f(x)$ 不为单调函数. …………（9分）

若 $a<0$，$f''(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上小于 0，在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 上大于 0，因此 $f'\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=-\ln(-2a)-3$ 为 $f'(x)$ 的极大值. …………（10分）

若 $-\ln(-2a)-3>0$，即 $a>-\dfrac{1}{2e^3}$ 时，$f'(x)$ 至少有两个零点，此时 $f(x)$ 在定义域内不为单调函数.

…………（11分）

当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2e^3}$ 时，$f'(x)\leqslant0$ 在定义域内恒成立，因此 $f(x)$ 在定义域内单调递减.

综上所述，$f(x)$ 为单调递减函数，$a\leqslant-\dfrac{1}{2e^3}$. …………（12分）

22.【命题意图】本题考查极坐标方程与直角坐标方程之间的转化、三角函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)由题意可得 $x^2+y^2=4$，…………（3分）

由于 $-1\leqslant t\leqslant1$，则 $1+t^2\leqslant2$，即 $y\geqslant0$. …………（4分）

因此曲线 C_1 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{4-x^2}$ 或 $x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$. …………………………………… (5 分)

(2)曲线 C_1 为上半圆,点 P 在 C_1 上,因此 $\rho=2,\theta\in[0,\pi]$. ………………………………………… (7 分)

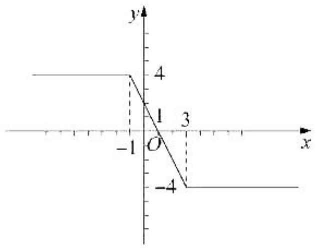
由三角函数的性质知,在 $[0,\pi]$ 上,$-1\leqslant\cos\theta+3\sin\theta\leqslant\sqrt{10}$, ……………………………………… (9 分)

因此 $\rho(\cos\theta+3\sin\theta)\in[-2,2\sqrt{10}]$. …………………………………………………………………… (10 分)

23.【命题意图】本题考查分段函数的图象、绝对值不等式的解法,考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)去掉绝对值符号,可得 $f(x)=\begin{cases}4, x<-1,\\ 2-2x, -1\leqslant x<3,\\ -4, x\geqslant 3,\end{cases}$ …………………………………… (2 分)

函数图象如下图所示:



…………………………………………………………………………………………… (4 分)

(2)由题意可得 $f(x)-2=\begin{cases}2, x<-1,\\ -2x, -1\leqslant x<3,\\ -6, x\geqslant 3,\end{cases}$ …………………………………………………………… (5 分)

$f(x+2)=\begin{cases}4, x<-3,\\ -2x-2, -3\leqslant x<1,\\ -4, x\geqslant 1,\end{cases}$ ……………………………………………………………………… (7 分)

因此,当 $x<-3$ 时,上述不等式方程的解集为 $\varnothing$;

当 $-3\leqslant x<-1$ 时,可以得到 $2\geqslant-2x-2$,求解得到 $x\geqslant-2$,与定义域的交集为 $[-2,-1)$;

当 $-1\leqslant x<1$ 时,可以得到 $-2x\geqslant-2x-2$,恒成立,与定义域的交集为 $[-1,1)$;

当 $1\leqslant x<3$ 时,可以得到 $-2x\geqslant-4$,求解得到 $x\leqslant 2$,与定义域的交集为 $[1,2]$;

当 $x\geqslant 3$ 时,无解. ……………………………………………………………………………………… (9 分)

综上所述,该不等式方程的解集为 $[-2,2]$. ………………………………………………………………… (10 分)