

信阳市实验高级中学2021-2022学年高三毕业班开学摸底测试

数学(文科)·答案

1. A 由题意知  $A = (-2, 2), B = (1, 3), \complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} B) \cap A = (-2, 1]$ .

2. B 设  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ , 则  $\frac{|z|}{z} + i = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+bi} + i = \frac{\sqrt{a^2+b^2}(a-bi)}{a^2+b^2} + i = \frac{a+(\sqrt{a^2+b^2}-b)i}{\sqrt{a^2+b^2}}$ . 由题意有  $\sqrt{a^2+b^2}-b=0 \Rightarrow a=0$ , 所以  $m=0$ .

3. C 程序的运行过程为

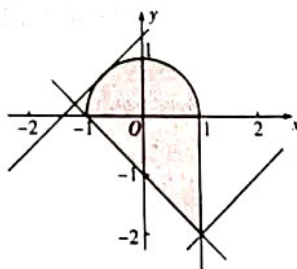
$n$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$a$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$b$	$\ln \frac{1}{2}$	0	$\ln \frac{3}{2}$	$\ln 2$	$\ln \frac{5}{2}$

$n=2$  时,  $1 > \ln 2$ ;  $n = \frac{5}{2}$  时,  $\frac{1}{2} < \ln \frac{5}{2}$ , 此时输出  $n = \frac{5}{2}$ .

4. B  $\frac{4^2}{\pi \cdot 10^2} = \frac{51}{1000} \Rightarrow \pi \approx 3.137$ .

5. D 根据题意画出可行域如图, 令  $z = x - y$ , 则直线  $y = x - z$  经过点  $(1, -2)$  时,  $z_{\max} = 1 - (-2) = 3$ ;

直线  $y = x - z$  与半圆  $y = \sqrt{1-x^2}$  相切时, 切点为  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 此时  $z_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ .

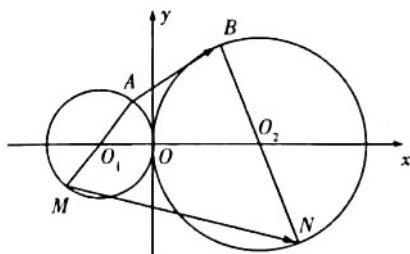


6. D  $y_1 = \ln |x|$  和  $y_2 = \cos(\frac{\pi x}{2})$  均为偶函数, 所以  $y = \ln |x| \cdot \cos(\frac{\pi x}{2})$  也为偶函数, 由奇偶性可以排除 A 选项. 下面考虑  $x > 0$  这一侧的图象: 当  $0 < x < 1$  时,  $y_1 < 0, y_2 > 0, y < 0$ ; 当

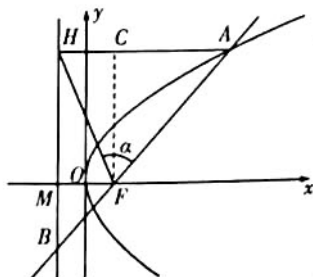
$x=1$  时,  $y=0$ ; 当  $1 < x < 2$  时,  $y_1 > 0, y_2 < 0, y < 0$ . 因此  $y$  在第一个零点  $x=1$  附近都为负, 答案选 D.

7. C 由已知可得,  $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  都是直角三角形, 则当它们都是等腰直角三角形且平面  $ABC \perp$  平面  $BCD$  时, 三棱锥  $D-ABC$  的体积最大, 最大值为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$ .

8. A 如图,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B}) \cdot (\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2N}) = [\overrightarrow{O_1O_2} + (\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B})] \cdot [\overrightarrow{O_1O_2} - (\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B})] = |\overrightarrow{O_1O_2}|^2 - |\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B}|^2 = 9 - |\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B}|^2$ , 其中  $|\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B}| \in [2-1, 2+1] = [1, 3]$ , 所以  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} \in [9-3^2, 9-1^2] = [0, 8]$ .



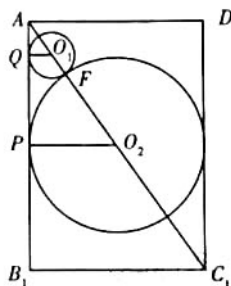
9. C 如图, 设准线与  $x$  轴的交点为  $M$ , 过点  $F$  作  $FC \perp AH$ . 由抛物线定义知  $|AF| = |AH|$ , 所以  $\angle AHF = \angle AFH = \alpha$ ,  $\angle FAH = \pi - 2\alpha = \angle OFB$ ,  $|BF| = \frac{|MF|}{\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$ ,  $|AF| = \frac{|CF|}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{|CF| \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$ , 所以  $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\pi - 2\alpha)} = \frac{\tan \alpha}{-\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2} = \frac{3}{2}$ .



10. B  $a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$  左右两端同乘以  $a_{n+1}$  有  $a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1}$ , 从而  $a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n, a_{n-1}^2 = a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1}, \dots, a_2^2 = a_2 a_3 - a_1 a_2$ , 将以上各式累加得  $a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_1 a_2$ . 由  $a_1 = a_2$  得  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$ . 令  $n = 2019$ , 有  $a_1^2 + a_2^2 + \dots +$

$$a_{2019}^2 = a_{2019} \cdot a_{2020} = 2020.$$

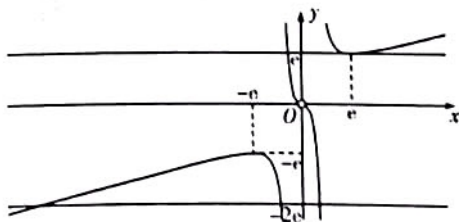
11. B 不妨设正方体的棱长为 2, 球  $O_1$  同时与以  $A$  为公共顶点的三个面相切. 由题可知, 两个球心  $O_1, O_2$  和两球的切点均在体对角线  $AC_1$  上, 两个球在平面  $AB_1C_1D$  处的截面如图所示. 则  $O_2F = r_2 = 1, AO_2 = \frac{AC_1}{2} = \sqrt{3}$ , 所以  $AF = AO_2 - O_2F = \sqrt{3} - 1$ . 又因为  $AF = AO_1 + O_1F = \sqrt{3}r_1 + r_1$ , 因此  $(\sqrt{3} + 1)r_1 = \sqrt{3} - 1$ , 得  $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ , 所以  $\frac{r_1}{r_2} = 2 - \sqrt{3}$ .



12. D 注意到  $x = \pm 1$  不满足原方程, 因此  $\ln |x| \neq 0$ , 将原方程左右两端同除以  $\ln^2 |x|$  变为  $(\frac{x}{\ln |x|})^2 + e \frac{x}{\ln |x|} - 2e^2 = 0$ , 得  $\frac{x}{\ln |x|} = e$  或  $\frac{x}{\ln |x|} = -2e$ . 令  $f(x) = \frac{x}{\ln |x|}$ , 当  $x > 0$  且  $x \neq 1$  时  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ , 令  $f'(x) = 0$  得  $x = e$ , 可得  $f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$x \rightarrow 0$	$(0, 1)$	$(1, e)$	$e$	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	/	-	-	0	+
$f(x)$	$f(x) \rightarrow 0$	$\searrow$	$\searrow$	$e$	$\nearrow$

作出  $y = f(x), y = -2e$  和  $y = e$  的图象, 由图可知, 原方程有 5 个实根.



13. 2 令  $f(1) = f(-1)$  得  $a = -1$ , 所以  $f(x) = e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$ , 当且仅当  $x=0$  时取等号.

14. -8 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ . 由  $a_{k+1} + a_{k+2} = 2a_k$  两边同除以  $a_k$ , 可得  $q + q^2 = 2$ , 解得  $q = 1$  或  $q = -2$ . 若  $q = 1$ , 则  $a_{k+1} + a_{k+2} = 2a_k$  恒成立, 故  $a_k = 1$  或  $a_k = -2$ . 若  $q = -2$ , 则  $a_{k+1} + a_{k+2} = 2a_k$  化为  $a_k(-2 + 4) = 2a_k$ , 即  $2a_k = 2a_k$ , 恒成立. 故  $a_k = 1$  或  $a_k = -2$ . 由  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2019} = 0$  得  $a_1(1 - 2^{2019}) = 0$ , 故  $a_1 = 1$ . 所以  $a_{2019} = 1$ .

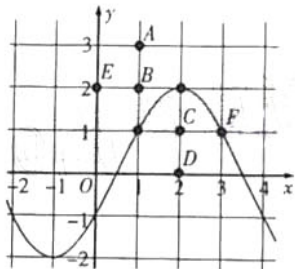
$a_1^2 = a_{2k}$ , 得  $(a_1 q^{k-1})^2 = a_1 q^{2k-1}$ , 解得  $a_1 = q = -2$ , 所以  
 $a_3 = a_1 q^2 = -8$ .

15.  $2\sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$  等腰直角三角形的第三个顶点可能的  
位置如下图中的点  $A, B, C, D, E, F$ , 其中点  $A, B, C, D$  与已  
有的两个顶点横坐标重复, 舍去; 若为点  $E$ , 则点  $E$  与点  
(2, 2) 的中间位置的点的纵坐标必然大于 2 或小于 -2, 不  
可能为 (1, 1), 因此点  $E$  也舍去, 只有点  $F$  满足题意. 此时  
点 (2, 2) 为最大值点, 所以  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ , 又  $0 < \omega <$   
 $\frac{\pi}{2}$ , 则  $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} > 1$ , 所以点 (1, 1), (2, 2) 之间的图象单  
调, 将 (1, 1), (2, 2) 代入  $f(x)$  的表达式有

$$\begin{cases} \sin(\omega + \varphi) = \frac{1}{2}, \\ \sin(2\omega + \varphi) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega + \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ 2\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega = \frac{\pi}{3}, \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{由 } |\varphi| < \frac{\pi}{2} \text{ 知 } \varphi = -\frac{\pi}{6}, \text{ 因此}$$

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$



16.  $\sqrt{2}$  或  $\sqrt{17}$  由唯一交点知直线  $l$  与渐近线平行, 不妨设  $l$

的斜率为  $\frac{b}{a}$ , 所以  $\tan \angle PF_1 F_2 = \frac{b}{a}$ ,  $\sin \angle PF_1 F_2 = \frac{b}{c}$ ,

$\cos \angle PF_1 F_2 = \frac{a}{c}$ . 在  $\triangle PF_1 F_2$  中, 由正弦定理有

$$\frac{|F_1 F_2|}{\sin \angle F_1 P F_2} = \frac{|PF_2|}{\sin \angle P F_1 F_2}, \text{ 得 } |PF_2| = \frac{5}{2}b, \text{ 则 } |PF_1| =$$

$\frac{5}{2}b - 2a$ , 由余弦定理有  $\cos \angle P F_1 F_2 =$

$$\frac{|PF_1|^2 + |F_1 F_2|^2 - |PF_2|^2}{2|PF_1| \cdot |F_1 F_2|}, \text{ 化简得 } (4a - b)(a - b) = 0,$$

解得  $b = a$  或  $b = 4a$ , 因此  $e = \sqrt{2}$  或  $\sqrt{17}$ .

17. 解: (I) 由正弦定理得  $\sin A \sin B + \sin B \cos A = \sin C$ . ...

..... (2分)

而  $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B) = \sin A \cos B +$   
 $\cos A \sin B$ . ..... (3分)

由以上两式得  $\sin A \sin B = \sin A \cos B$ , 即  $\sin A(\sin B -$   
 $\cos B) = 0$ .

由于  $\sin A > 0$ , 所以  $\sin B = \cos B$ , ..... (5分)

又由于  $B \in (0, \pi)$ , 得  $B = \frac{\pi}{4}$ . ..... (6分)

(II) 设  $c = 1$ , 在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理有  $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow$

$b = \sqrt{5}$ . ..... (8分)

由余弦定理有  $a^2 + c^2 - 2ac \cos B = b^2$ , 整理得  $(a - 2\sqrt{2})(a +$   
 $\sqrt{2}) = 0$ ,

由于  $a > 0$ , 所以  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $BD = \frac{a}{2} = \sqrt{2}$ . ..... (10分)

在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理有  $AD =$

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}} = 1. \text{ ..... (11分)}$$

所以  $AB^2 + AD^2 = BD^2$ , 所以  $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle ADB = \frac{\pi}{4}$ . ...

..... (12分)

18. 解: (I) [40, 45) 区间对应的个体个数为  $0.03 \times 5 \times 20 =$

3, 对应的三个数据分别为 41, 42, 43, 因此  $a$  必须要大于 4

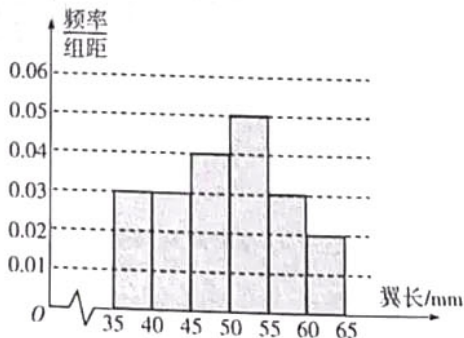
且小于 6, 从而  $a = 5$ . ..... (3分)

(II) 区间 [35, 40), [45, 50), [50, 55), [55, 60), [60, 65)

对应的纵坐标分别为

$$\frac{3}{20 \times 5} = 0.03, \frac{4}{20 \times 5} = 0.04, \frac{5}{20 \times 5} = 0.05, \frac{3}{20 \times 5} = 0.03,$$

$$\frac{2}{20 \times 5} = 0.02. \text{ ..... (5分)}$$



..... (8分)

(III) 根据茎叶图, 中位数为  $\frac{49 + 50}{2} = 49.5$ . ..... (5分)

频率分布直方图中, 区间 $[35, 50)$ 的频率为 $(0.03 + 0.03 + 0.04) \times 5 = 0.5$ , 因此中位数为 50. .... (10分)  
利用茎叶图计算的中位数更加准确, 因为频率分布直方图损失了样本的部分信息, 数据的分组对数字特征的估计结果也有影响, 而茎叶图是原始数据, 记录了样本的全部信息, 所以能更准确地反映蜻蜓翼长的总体情况. .... (12分)

19. 解: (1) 存在点  $P$  满足题意, 且  $PA = \frac{3}{4}$ . .... (1分)

证明如下:

取  $A_1C_1$  的中点为  $F$ , 连接  $EF, AF, DF$ .

则  $EF \parallel A_1B_1 \parallel AB$ , 所以  $AF \subset$  平面  $ABE$ . .... (2分)

因为  $AB = BC, D$  是  $AC$  的中点, 所以  $BD \perp AC$ .

在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 平面  $ABC \perp$  平面  $ACC_1$ , 且交线为  $AC$ ,

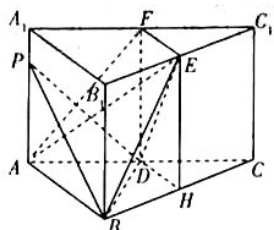
所以  $BD \perp$  平面  $ACC_1$ , 所以  $BD \perp AF$ . .... (3分)

在平面  $ACC_1$  内,  $\frac{AP}{AD} = \frac{AD}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\angle PAD = \angle ADF = 90^\circ$ ,

所以  $Rt\triangle PAD \sim Rt\triangle ADF$ , 从而可得  $AF \perp PD$ . .... (4分)

又因为  $PD \cap BD = D$ , 所以  $AF \perp$  平面  $PBD$ . .... (5分)

因为  $AF \subset$  平面  $ABE$ , 所以平面  $PBD \perp$  平面  $ABE$ . .... (6分)



(II) 过点  $E$  作  $EH \perp BC$ , 垂足为  $H$ , 连接  $DH$ .

设点  $A$  到平面  $BDE$  的距离为  $h$ .

$$V_{E-ABD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABD} \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}. \dots (8分)$$

$$\text{而 } BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, DE =$$

$$\sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

所以  $\triangle EDB$  是等腰三角形, 腰长为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 底边长为  $\frac{1}{2}$ .

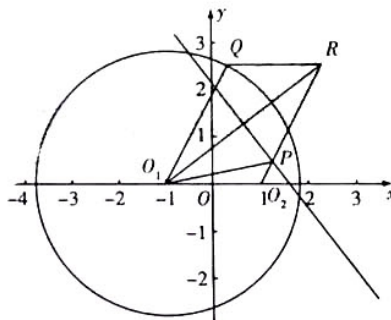
$$\text{所以 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{19}}{16}. \dots (10分)$$

$$\text{因此 } V_{A-BDE} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BDE} \times h = \frac{\sqrt{19}}{48} h = \frac{\sqrt{3}}{24}, \text{ 解得 } h = \frac{2\sqrt{57}}{19}. \dots (12分)$$

20. 解: (I)  $|PO_1| + |PO_2| = |PR| + |PO_2| = |RO_2| = |QO_1| = 2\sqrt{2}$ , .... (2分)

所以点  $P$  的轨迹是一个椭圆, 且长轴长  $2a = 2\sqrt{2}$ , 半焦距  $c = 1$ , .... (3分)

所以  $b^2 = a^2 - c^2 = 1$ , 轨迹  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ . .... (4分)



(II) 当直线  $AB$  的斜率为 0 时, 与曲线  $C$  无交点. .... (5分)

当直线  $AB$  的斜率不为 0 时, 设过点  $O_2$  的直线方程为  $x = my + 1$ , 点  $A, B$  坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ .

$$\text{直线与椭圆方程联立得 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 +$$

$$2my - 1 = 0.$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 2}. \dots (7分)$$

$$\text{直线 } KA \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}(x - 2).$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } y_M = \frac{(m-2)y_1 + 1}{my_1 - 1}. \dots (8分)$$

$$\text{同理可得 } y_N = \frac{(m-2)y_2 + 1}{my_2 - 1}. \dots (9分)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{y_M + y_N}{2} &= \frac{[(m-2)y_1 + 1](my_2 - 1) + [(m-2)y_2 + 1](my_1 - 1)}{(my_1 - 1)(my_2 - 1)} \\ &= \frac{m(m-2)y_1y_2 + (y_1 + y_2) - 1}{m^2y_1y_2 - m(y_1 + y_2) + 1} \\ &= \frac{-m(m-2) - 2m - (m^2 + 2)}{-m^2 + 2m^2 + m^2 + 2} \\ &= -1, \end{aligned}$$

所以 MN 的中点为 (0, -1). ..... (10分)  
不妨设 M 点在 N 点的上方,  
则  $S_{\triangle KMN} = \frac{1}{2} |MN| \cdot 2 = |MN| = 2[y_M - (-1)] \leq 2 \times (1+1) = 4$ . ..... (12分)

21. 解: (I) 由题意知  $f'(x) = \frac{1}{x} + a$ , 所以  $f'(1) = a + 1$ , ..... (1分)

又因为  $f(1) = a + b$ , 所以切线方程为  $y - (a + b) = (a + 1)(x - 1)$ . ..... (3分)

代入点 (0, 0), 得  $b = 1$ . ..... (4分)

(II)  $g(x) = \frac{\ln x + ax + 1}{e^x}$ ,  $g'(x) = \frac{-\ln x - ax + \frac{1}{x} + a - 1}{e^x}$ .

令  $h(x) = -\ln x - ax + \frac{1}{x} + a - 1$ , 则  $h'(x) = \frac{-ax^2 + x + 1}{x^2}$ .

令  $\varphi(x) = -(ax^2 + x + 1)(x > 0)$ . ..... (5分)

(i) 若  $a \geq 0$ , 则  $\varphi(x) < 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 注意到  $h(1) = 0$ ,

所以  $g(x)$  的单调性如下表:

$x$	(0, 1)	1	(1, +∞)
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

此时  $g(x)$  有一个极值点. .... (7分)

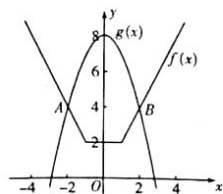
(ii) 若  $a < 0$ , 令  $\varphi(x) = 0$ , 得  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2a} < 0$  (舍),

$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2a} > 0$ , 易知  $h(x)$  在  $(0, x_2)$  上单调递减,

在  $(x_2, +\infty)$  上单调递增. .... (8分)

下面讨论  $x_2$  与 1 的大小关系, 由于  $\varphi(1) = -2 - a$ .

① 若  $-2 < a < 0$ , 则  $\varphi(1) < 0$ ,  $x_2 > 1$ . 由  $h(x)$  的单调性知



..... (4分)

由  $8 - x^2 = 2x \Rightarrow x = 2$  或  $x = -4$  (舍), 得点 B 横坐标为 2,

由对称性知, 点 A 横坐标为 -2,

因此不等式  $f(x) \leq 8 - x^2$  的解集为  $[-2, 2]$ . .... (5分)

(II)  $f(x) = |x - a| + |x + b| \geq |(x + b) - (x - a)| = |a + b| =$

$h(x_2) < h(1) = 0$ , 而  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ , 则存在  $x_0 \in (x_2, +\infty)$  使得  $h(x_0) = 0$ , 因此  $g(x)$  的单调性如下表:

$x$	(0, 1)	1	(1, $x_0$ )	$x_0$	( $x_0, +\infty$ )
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时  $g(x)$  有两个极值点. .... (10分)

② 若  $a = -2$ , 则  $x_2 = 1$ . 又  $h(1) = 0$ , 由  $h(x)$  的单调性知  $h(x) \geq 0$ , 即  $g'(x) \geq 0$ , 所以  $g(x)$  单调递增, 无极值点.

..... (11分)

综上所述: 若  $a \geq 0$ , 则  $g(x)$  有一个极值点;

若  $-2 < a < 0$ , 则  $g(x)$  有两个极值点;

若  $a = -2$ , 则  $g(x)$  没有极值点. .... (12分)

22. 解: (I) 直线  $l_1$  的极坐标方程为  $\theta = \varphi (\rho \in \mathbf{R})$ . .... (1分)

..... (1分)

直线  $l_2$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi (\rho \in \mathbf{R})$ . .... (2分)

由曲线 C 的极坐标方程得  $\rho^2 \sin^2 \theta = \rho \cos \theta$ ,

所以 C 的直角坐标方程为  $y^2 = x$ . .... (4分)

(II)  $l_1$  与 C 的极坐标方程联立得  $\begin{cases} \theta = \varphi, \\ \rho \sin^2 \theta = \cos \theta, \end{cases}$  所以

$$\rho_A = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \dots\dots\dots (5分)$$

$l_2$  与 C 的极坐标方程联立得  $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \\ \rho \sin^2 \theta = \cos \theta, \end{cases}$  所以  $\rho_B =$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \dots\dots\dots (6分)$$

$$\text{所以 } |OA| \cdot |OB| = |\rho_A \rho_B| = \frac{|\cos \varphi|}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{|\sin \varphi|}{\cos^2 \varphi} =$$

$$\frac{1}{|\sin \varphi \cos \varphi|} = \frac{2}{|\sin 2\varphi|} \dots\dots\dots (8分)$$

所以当  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$  时,  $|OA| \cdot |OB|$  取最小值 2.

..... (10分)

23. 解: (I)  $f(x) = |x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} 2x(x > 1), \\ 2(-1 \leq x \leq 1), \\ -2x(x < -1). \end{cases}$

令  $g(x) = 8 - x^2$ , 作出它们的大致图象如下:

$a + b = 1$ . .... (6分)

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2b} \right) [(a+1) + b] = \frac{1}{2}$$

$$\left( 1 + \frac{b}{a+1} + \frac{a+1}{2b} + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

..... (9分)

取等号的条件为  $\frac{b}{a+1} = \frac{a+1}{2b}$ , 即  $a+1 = \sqrt{2}b$ , 联立  $a+b=1$

$$\begin{cases} a = 3 - 2\sqrt{2}, \\ b = 2\sqrt{2} - 2. \end{cases}$$

因此  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2b}$  的最小值为  $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ . .... (10分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》