参考答案及解析

一、选择题

1. A 【解析】由 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 得 $\frac{-3}{n}=\frac{m}{-1}=2$，解得 $m=-2,n=-\frac{3}{2}$，则 $\frac{m}{n}=\frac{4}{3}$. 故选 A 项.

2. C 【解析】$z=\frac{2-2i}{(1+i)^2}=\frac{2-2i}{2i}=-1-i$，所以 $\bar{z}=-1+i$. 故选 C 项.

3. B 【解析】由幂函数的定义可知 $m-1=1$，解得 $m=2$，将点 $\left(2,\frac{1}{16}\right)$ 代入 $f(x)=x^n$，得 $2^n=\frac{1}{16}=2^{-4}$，解得 $n=-4$，所以 $f(x)=x^{-4}$. 故选 B 项.

4. C 【解析】由 $m\perp\alpha,n\perp\beta$，且 $\alpha//\beta$ 可知，$m\perp\alpha,n\perp\alpha$，所以能够推出 $m//n$，A 项不符合题意；由 $\alpha\cap\gamma=m,\beta\cap\gamma=n$，且 $\alpha//\beta$ 及面面平行的性质定理可知，能够推出 $m//n$，B 项不符合题意；由 $\alpha//\beta,\beta//\gamma$，得 $\alpha//\gamma$，又 $m\subset\alpha$，$n\subset\gamma$，所以 m,n 可能平行，可能异面，则不能够推出 $m//n$，C 项符合题意；由 $l\perp\alpha,n\perp\alpha$ 可知，$l//n$，又 $m//l$，所以 $m//n$，D 项不符合题意. 故选 C 项.

5. A 【解析】因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BM}$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{FE}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 故选 A 项.

6. D 【解析】由三角函数的定义可知 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，$\tan\beta=\frac{b}{c}$，由 $2ac=a^2-b^2$，得 $\frac{1}{c}=\frac{2a}{a^2-b^2}$，即 $\frac{b}{c}=\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，则 $\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha>0$，又 α,β 均为锐角，则 2α 为锐角，所以 $\beta=2\alpha$. 故选 D 项.

7. A 【解析】由柏拉图多面体的性质可知，四边形 $ABCD,BEDF$ 均为边长为 1 的正方形，侧面均为等边三角形. 取 AE 的中点 K，连接 PK,KQ，则 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$，同理 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{DF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\times 1\times 1\times\cos 60^\circ+0+\frac{1}{4}\times 1\times 1+\frac{1}{4}\times 1\times 1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. 故选 A 项.

8. D 【解析】若 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 0 个零点，当 $a>0$ 时，则 $\begin{cases}\Delta>0,\\-a<-1,\\f(-a)=-2a^2+3a+3\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\Delta<0$，解得 $a\geqslant\frac{3+\sqrt{33}}{4}$；当 $a\leqslant 0$ 时，$\begin{cases}\Delta<0,\\0\leqslant -a\leqslant 2,\end{cases}$ 无解，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 0 个零点，则实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{3+\sqrt{33}}{4},+\infty\right)$，甲同学结论错误；若 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 1 个零点，当 $a>0$ 时，则 $\begin{cases}\Delta>0,\\f(0)=3-a>0,\\f(-a)=-2a^2+3a+3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=0,\\-a>-1,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{3+\sqrt{33}}{4}$；当 $a\leqslant 0$ 时，$\begin{cases}\Delta<0,\\2<-a\leqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta>0,\\-a\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 1 个零点，则实数 a 的取值范围为 $\left[-2,\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$，乙同学结论错误；$f(x)=-2x^2-4x+3-a,x\leqslant 0$ 至多有两个零点，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 3 个零点，则 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x,x>0$ 需有零点，则 $a<0$，又 $f(0)=3-a>0$，所以 $f(x)=-2x^2-4x+3-a,x\leqslant 0$ 仅有一个零点，所以 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x,x>0$ 有 2 个零点，则 $4<-a\leqslant 6$，所以 $-6\leqslant a<-4$，故若 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为 $[-6,-4)$，丙同学结论正确；若 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 5 个零点，由上可知，$a<0$，且 $f(x)=-2x^2-4x+3-a,x\leqslant 0$ 仅有一个零点，所以 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x,x>0$ 有 4 个零点，则 $8<-a\leqslant 10$，所以 $-10\leqslant a<-8$，故若 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上有 5 个零点，则实数 a 的取值范围为 $[-10,-8)$，丁同学结论正确. 故选 D 项.

二、选择题

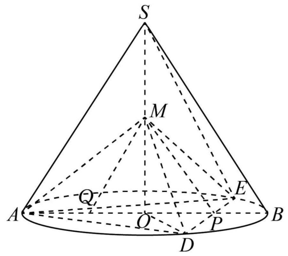
9. BCD 【解析】由 $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 可知，$f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$，其图像相邻两条对称轴之间距离为 $\frac{\pi}{3}$，A 项错误；令 $3x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{9},k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，则 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{9},0\right)$

对称，B 项正确；令 $2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{7\pi}{18},k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{18},\frac{7\pi}{18}\right]$ 上单调递减，可见 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不单调，C 项正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$3x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$，D 项正确. 故选 BCD 项.

10. AD 【解析】棱长为 1 m 的正方体的外接球的直径为 $\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}<2$，A 项正确；棱长为 1 m 的正六棱锥底面的外接圆的半径为 1 m，此时外接圆恰好是半径为 1 m 的球体的大圆，而正六棱锥的高为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}>1$，显然不能够整体放入球体容器，B 项错误；底面直径为 1 m，高为 $\sqrt{3}$ m 的圆柱体的外接球的半径为 $\sqrt{0.55^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1.0525}>1$，C 项错误；底面直径为 0.8 m，高为 1.8 m 的圆柱体的外接球的半径为 $\sqrt{0.4^2+0.9^2}=\sqrt{0.97}<1$，D 项正确. 故选 AD 项.

11. ACD 【解析】由函数 $y=xf(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数可知，$f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$. 由 $f(x-1)+f(x+3)=0$，得 $f(x)+f(x+4)=0$，则 $f(x+4)=-f(x)=f(-x)$，所以 $f(x+2)=f(2-x)$，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，A 项正确；由 $f(8+x)=-f(4+x)=f(x)$ 可知，8 是 $f(x)$ 的一个周期，由 $f(x)=-f(x+4)$ 可知，4 不是 $f(x)$ 的一个周期，B 项错误；当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=2^x-2^{-x}+x$ 为增函数，又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，C 项正确；又 $f(2\ 023)=f(8\times 253-1)=f(-1)$，$0.5<0.5^{0.2}<1$，且 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，所以 $f(-1)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(0.5^{0.2})$，即 $f(2\ 023)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(0.5^{0.2})$，D 项正确. 故选 ACD 项.

12. ABC 【解析】如图所示，因为 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AE}$，所以 $\triangle ADE$ 为等边三角形，因为 $\angle ASE=60^\circ$，所以 $\triangle ASE$ 为等边三角形. 由 $AE=\sqrt{3}a$，得 $AB=\frac{\sqrt{3}a}{\sin 60^\circ}=2a$，在 $\triangle ABS$ 中，$SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{2}a$，则 $OM=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，连接 OD，则 $DM=\sqrt{OM^2+OD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，同理 $ME=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，因为 $DE^2=DM^2+ME^2$，所以 $DM\perp ME$. 同理证得 $DM\perp AM$. 因为 $AM\cap ME=M$，所以 $DM\perp$ 平面 AEM，又 $DM\subset$ 平面 ADM，所以平面 $ADM\perp$ 平面 AEM，A 项正确；由上可知，三棱锥 $A\text{-}DEM$ 的体积为 $V_{三棱锥A\text{-}DEM}=V_{三棱锥M\text{-}ADE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AE^2\sin 60^\circ\cdot OM=\frac{\sqrt{6}}{8}a^3$，B 项正确；取 OB 的中点 P，连接 MP，则 $MP/\!/SB$，所以 $\angle DMP$ 为异面直线 MD 与 SB 所成角，因为 $\triangle DEM$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle DMP=45^\circ$，C 项正确；由 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AE}$，得 $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}$，所以 $\angle DAB=\angle EAB$，则 $AB\perp DE$. 由圆锥的性质可知，$SO\perp$ 底面圆 O，平面 $ABS\cap$ 底面圆 $O=AB$，所以 $DE\perp$ 平面 ABS，则平面 $ABS\perp$ 平面 DEM，即平面 $ABM\perp$ 平面 DEM. 取 OA 的中点 Q，连接 MQ，则 $MQ/\!/SA$，所以直线 SA 与平面 DEM 所成角等于直线 MQ 与平面 DEM 所成角. 由上可知，直线 MQ 在平面 DEM 内的射影在直线 MP 上，所以 $\angle QMP$ 为直线 SA 与平面 DEM 所成角. 易知 $MQ=MP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$PQ=a$，显然 $\angle QMP\neq 60^\circ$，D 项错误. 故选 ABC 项.



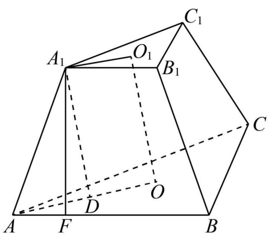
三、填空题

13. 1 【解析】由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$ 得，$4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，由 $\left|\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，则 $4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，所以 $8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.

14. 8（答案不唯一，大于或等于 8 即可）【解析】设矩形 $ABCD$ 的长与宽分别为 a,b，根据斜二测画法可知，直观图的面积 S' 与原图的面积 S 之间满足 $\frac{S'}{S}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{ab}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $ab=4$，则 $2(a+b)\geqslant 2\times 2\sqrt{ab}=8$，当且仅当 $a=b=2$ 时取得等号，所以矩形 $ABCD$ 周长的最小值为 8，故矩形 $ABCD$ 的周长可以为 8，9，10 等.

15. $\frac{63\sqrt{2}}{4}$ 【解析】如图，设正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的上、下底面的边长分别为 $a,b(a<b)$，O_1,O 分别为上、下底面的中心，连接 OO_1，则 OO_1 为正三棱台的高，$OO_1=\sqrt{6}$，易知 $A_1O_1=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$AO=\frac{\sqrt{3}}{3}b$. 过 A_1 作

$A_1D\perp AO$，垂足为 D，则 $AD=\frac{\sqrt{3}}{3}(b-a)$，所以 $\frac{1}{3}(b-a)^2+(\sqrt{6})^2=9$，所以 $b-a=3$. 过 A_1 作 $A_1F\perp AB$，垂足为 F，则 $AF=\frac{1}{2}(b-a)=\frac{3}{2}$，所以 $A_1F=\sqrt{AA_1^2-AF^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，因为正三棱台的侧面积为 $\frac{81\sqrt{3}}{4}$，所以每个侧面的面积为 $\frac{27\sqrt{3}}{4}$，由 $\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$，得 $a+b=9$，解得 $a=3,b=6$，所以上、下底面的面积分别为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$9\sqrt{3}$，故该正三棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+9\sqrt{3}+\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4}\times 9\sqrt{3}}\right)\times\sqrt{6}=\frac{63\sqrt{2}}{4}$.



16. $3\sqrt{7}$ 【解析】由 $3b\cdot BD=2c\cdot CD$，得 $\frac{BD}{CD}=\frac{2c}{3b}$，$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot BD\sin\angle ADB}{\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin\angle ADC}=\frac{BD}{DC}=\frac{2c}{3b}$. 设 $\angle BAD=\theta(0°<\theta<120°)$，则 $\angle DAC=120°-\theta$，由 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}\times 2c\sin\theta}{\frac{1}{2}\times 2b\sin(120°-\theta)}=\frac{2c}{3b}$，得 $3\sin\theta=2\sin(120°-\theta)$，整理得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\sin(120°-\theta)=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2c\sin\theta+\frac{1}{2}\times 2b\sin(120°-\theta)=\frac{\sqrt{21}}{7}c+\frac{3\sqrt{21}}{14}b=\frac{\sqrt{21}}{7}\left(c+\frac{3}{2}b\right)=3\sqrt{7}$.

四、解答题

17. **解**：由 $\boldsymbol{a}=\left(2,1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\alpha,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sin\alpha+1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$，（1 分）

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.（3 分）

(1) $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=-3$.（5 分）

(2) $\frac{2\cos^2\alpha-\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2}{1-\tan\alpha}=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}$.（10 分）

18. (1) **证明**：连接 AE，因为 M,N 分别为 AB,EF 的中点，所以 $AM/\!/EN$，且 $AM=EN$，（1 分）

所以四边形 $AMNE$ 为平行四边形，则 $AE/\!/MN$，（2 分）

在 $\triangle ACE$ 中，G,H 分别为 AC,EC 的中点，

所以 GH 为 $\triangle ACE$ 的中位线，

则 $GH/\!/AE$，所以 $GH/\!/MN$，（4 分）

又 $MN\subset$ 平面 DMN，$GH\not\subset$ 平面 DMN，

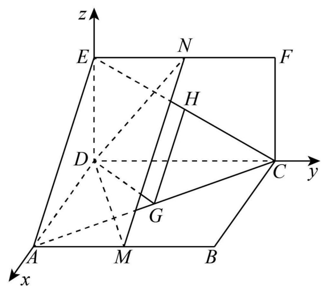
故 $GH/\!/$ 平面 DMN.（5 分）

(2) **解**：因为平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $CDEF\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$DE\perp CD$，

所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，则 $ED\perp AD$.（6 分）

由题意可知 $AD\perp DC$.

以 D 为坐标原点，DA,DC,DE 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$E(0,0,1)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，则 $\overrightarrow{DG}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.（7 分）

设线段 EC 上存在满足题意的点 Q，$\frac{EQ}{QC}=\lambda$，

则 $Q\left(0,\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda},\frac{1}{1+\lambda}\right)$，所以 $\overrightarrow{AQ}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda},\frac{1}{1+\lambda}\right)$，（9 分）

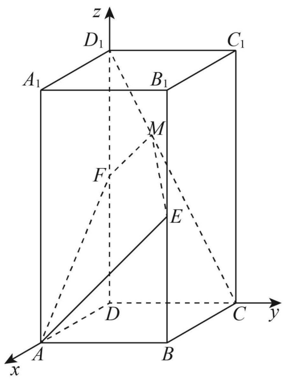
由 $AQ\perp DG$ 可知 $-\frac{1}{2}+\frac{3\lambda}{2(1+\lambda)}=0$，

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，（11 分）

故存在满足题目条件的点 Q，且 $\frac{EQ}{QC}=\frac{1}{2}$.（12 分）

19.(1)**证明**:因为 $DD_1\perp$平面 $ABCD$,$AD,CD\subset$平面 $ABCD$,所以 $DD_1\perp AD$,$DD_1\perp CD$,

又 $AD\perp DC$,所以以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$,$E(1,1,1)$,$F(0,0,1)$,$C(0,1,0)$,$D_1(0,0,2)$,　　(1分)

所以 $\overrightarrow{CD_1}=(0,-1,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{AF}=(-1,0,1)$,

由 $CM=2MD_1$,得 $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD_1}=\left(0,-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$,　　(2分)

所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\left(-1,\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.　　(3分)

设 $\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{AE}+\lambda\overrightarrow{AF}$,则 $\begin{cases}-\lambda=-1,\\ \mu=\frac{1}{3},\\ \mu+\lambda=\frac{4}{3},\end{cases}$

解得 $\lambda=1,\mu=\frac{1}{3}$.　　(5分)

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$,故 A,E,M,F 四点共面.　　(6分)

(2)**解**:设平面 $AEMF$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+z=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

取 $x=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$.　　(9分)

设直线 CD_1 与平面 $AEMF$ 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CD_1},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CD_1}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{CD_1}||\boldsymbol{m}|}=\frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,　　(11分)

故直线 CD_1 与平面 $AEMF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.　　(12分)

20.**解**:(1)由 $f(x)=\log_3\frac{ax+1}{2x-1}$ 是奇函数,

得 $f(-x)=-f(x)$,　　(1分)

即 $\log_3\frac{-ax+1}{-2x-1}=-\log_3\frac{ax+1}{2x-1}=\log_3\frac{2x-1}{ax+1}$,

所以 $\frac{-ax+1}{-2x-1}=\frac{2x-1}{ax+1}$,

整理得 $1-a^2x^2=1-4x^2$,对于 $f(x)$ 定义域内的每一个 x 恒成立,

所以 $a^2=4$,解得 $a=\pm2$.　　(3分)

当 $a=2$ 时,$f(x)=\log_3\frac{2x+1}{2x-1}$ 为奇函数,符合题意;　　(4分)

当 $a=-2$ 时,$\frac{-2x+1}{2x-1}=-1$,$f(x)$ 不存在.　　(5分)

综上,实数 a 的值为 2.　　(6分)

(2)$f(x)=\log_3\frac{2x+1}{2x-1}=\log_3\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)$,$x\in\left[-1,-\frac{5}{8}\right]$,　　(7分)

易知 $y=1+\frac{2}{2x-1}$ 在 $\left[-1,-\frac{5}{8}\right]$ 上单调递减,

所以 $\frac{1}{9}\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}$.　　(8分)

设 $t=f(x)$,则 $t\in[-2,-1]$,　　(9分)

由 $f(x)-3^{-f(x)}-m\leqslant0$,

得 $m\geqslant t-3^{-t}$ 在 $[-2,-1]$ 上恒成立,　　(10分)

令 $g(t)=t-3^{-t}$,$t\in[-2,-1]$,

易知 $g(t)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增,

所以 $g(t)_{\max}=g(-1)=-1-3=-4$,　　(11分)

则 $m\geqslant-4$,

故实数 m 的取值范围为 $[-4,+\infty)$.　　(12分)

21.**解**:(1)由 $\angle ACB=\angle ACD$,$\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

得 $\cos\angle BCD=2\cos^2\angle ACB-1=2\times\frac{10}{25}-1=-\frac{1}{5}$,

则 $\sin\angle BCD=\sqrt{1-\cos^2\angle BCD}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,　　(2分)

在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$,

即 $\frac{70}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\frac{50}{\sin\angle BDC}$,　　(4分)

所以 $\sin\angle BDC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.　　(5分)

(2)在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得 $70^2=CD^2+50^2-2\times50CD\times\left(-\frac{1}{5}\right)$,

整理得 $CD^2+20CD-2\,400=0$,

解得 $CD=40$($CD=-60$ 舍去). (6分)

在△ACD 中,$AC=AD$,

所以 $\cos\angle ACD=\cos\angle ADC=\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{10}}{5}$, (7分)

又 $\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{20}{AC}$,

解得 $AC=AD=10\sqrt{10}$. (8分)

在△ABC 中,$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB=1\ 000+50^2-2\times10\sqrt{10}\times50\times\frac{\sqrt{10}}{5}=1\ 500$, (10分)

所以 $AB=10\sqrt{15}<40$. (11分)

由于观光通道每米的造价为2 000元,所以总造价低于 $40\times2\ 000=80\ 000$ 元,故预算资金够用. (12分)

22.(1)**证明:**由 $AD\parallel BC$,$\angle ABC=120°$,$BC=2AB=2AD=2$ 可知,△ABD 为等边三角形,所以 $BD=1$.

又 $\angle CBD=60°$,则 $CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos 60°=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$,则 $CD=\sqrt{3}$. (1分)

所以 $CD^2+BD^2=BC^2$,所以 $BD\perp CD$. (2分)

因为直线 CD 与 PB 垂直,即 $PB\perp CD$,

又 $PB\cap BD=B$,所以 $CD\perp$ 平面 PBD, (3分)

因为 $PD\subset$ 平面 PBD,所以 $CD\perp PD$,

故△PCD 为直角三角形. (4分)

(2)**解:**取 BD 的中点 O,连接 PO,AO.

因为 $PB=PD$,所以 $PO\perp BD$,

由(1)可知,平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$,

又平面 $PBD\cap$ 平面 $ABCD=BD$,$PO\subset$ 平面 PBD,

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,

又 $OA\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PO\perp OA$,

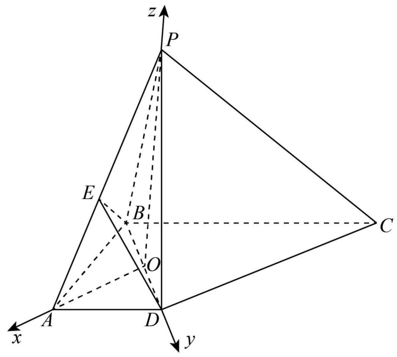
又△ABD 为等边三角形,所以 $AO\perp BD$. (5分)

易知梯形 $ABCD$ 的面积 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AD\cdot AB\sin 60°+\frac{1}{2}BD\cdot CD=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

所以 $V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{梯形ABCD}\cdot PO=\frac{\sqrt{3}}{4}PO=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

则 $PO=3$. (6分)

由上可知,OA,OD,OP 两两互相垂直,以 O 为原点,分别以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,



$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$,$B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$,$D\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,$P(0,0,3)$,

则 $\overrightarrow{BD}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{BA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,3\right)$,$\overrightarrow{OP}=(0,0,3)$. (7分)

设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AP}(0<\lambda\leqslant1)$,则 $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,0,3\lambda\right)$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{2},\frac{1}{2},3\lambda\right)$. (8分)

设平面 BDE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=y=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{2}x+\frac{1}{2}y+3\lambda z=0,\end{cases}$

取 $x=-2$,则 $\boldsymbol{m}=\left(-2,0,\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{3\lambda}\right)$. (9分)

由上可知 $\overrightarrow{OP}=(0,0,3)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量,记 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OP}$,

则 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda}\right|}{3\sqrt{4+\left[\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{3\lambda}\right]^2}}=\frac{1}{2}$. (10分)

令 $t=\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda}(t\geqslant0)$,整理得 $4t^2=t^2+36$,

解得 $t=2\sqrt{3}$(负值舍去),

则 $\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\lambda}=2\sqrt{3}$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$, (11分)

经检验,$\lambda=\frac{1}{3}$ 符合要求.

故 $AE=\frac{1}{3}AP=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4}+9}=\frac{\sqrt{39}}{6}$. (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。