

2023 年高三第一次模拟考试

# 数学试题

**注意事项:**

1. 答卷前, 考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、班级、考号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡右上角“贴条形码区”。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 答案写在本试卷上无效。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题:** 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{-1, 0, 1, 2\}$     B.  $\{2, 3\}$     C.  $\{0, 1, 2\}$     D.  $\{1, 2, 3\}$

2. 已知复数  $z = -2i$ , 则  $(\bar{z} - 2)^2 =$

- A.  $-8i$     B.  $8i$     C.  $8 - 8i$     D.  $8 + 8i$

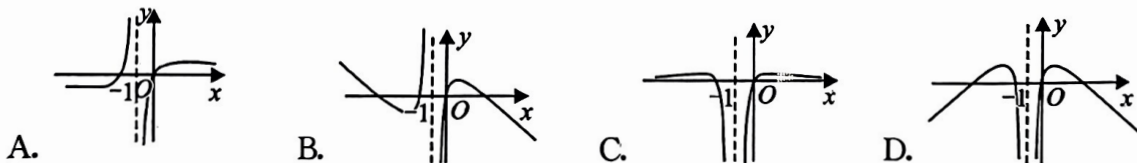
3. 设  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 则“ $\alpha$  内有无数条直线与  $\beta$  平行”是“ $\alpha // \beta$ ”的

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

4. 保定市主城区开展提升城市“新颜值”行动以来, 有一街边旧房拆除后, 打算改建成矩形花圃  $ABCD$ , 中间划分出直角三角形  $MPQ$  区域种玫瑰, 直角顶点  $M$  在边  $AB$  上, 且距离  $A$  点 5m, 距离  $B$  点 6m, 且  $P, Q$  两点分别在边  $BC$  和  $AD$  上, 已知  $BC = 8m$ , 则玫瑰园的最小面积为

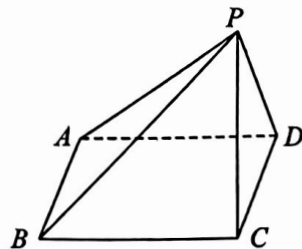
- A.  $30m^2$     B.  $15m^2$     C.  $30\sqrt{2}m^2$     D.  $15\sqrt{2}m^2$

5. 函数  $f(x) = \frac{2\ln|x+1|}{(x+1)^2}$  的大致图象为

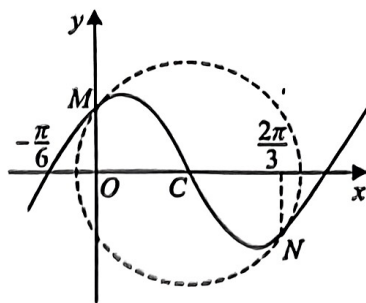


6. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $AB = 2$ , 侧面  $PAD$  是正三角形, 侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ , 且  $V_{P-ABCD} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ , 则  $PC$  与平面  $PAD$  所成角的正切值为

- A. 2    B.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\sqrt{3}$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



7. 函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ , ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图象如图中实线所示, 图中圆  $C$  与  $f(x)$  的图象交于  $M, N$  两点, 且  $M$  在  $y$  轴上, 则下列说法正确的是



- A. 函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\frac{10}{9}\pi$
- B. 函数  $f(x)$  在  $(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3})$  上单调递减
- C. 函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称
- D. 若圆  $C$  的半径为  $\frac{5\pi}{12}$ , 则函数  $f(x)$  的解析式为  $f(x) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

8. 已知  $a = e^{\frac{1}{4}} - 1$ ,  $b = \frac{1}{2\pi}$ ,  $c = \sin \frac{1}{4}$ , 则

- A.  $a > b > c$
- B.  $b > a > c$
- C.  $c > b > a$
- D.  $a > c > b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知平面向量  $a = (-2, 1)$ ,  $b = (4, 2)$ ,  $c = (2, t)$ , 则下列说法正确的是

- A. 若  $b \perp c$ , 则  $t = 4$
- B. 若  $a \parallel c$ , 则  $t = -1$
- C. 若  $t = 1$ , 则向量  $a$  在  $c$  上的投影向量为  $-\frac{3}{5}c$
- D. 若  $t > -4$ , 则向量  $b$  与  $c$  的夹角为锐角

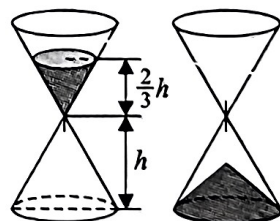
10. 椭圆有一条光学性质: 从椭圆一个焦点出发的光线, 经过椭圆反射后, 一定经过另一个焦点. 假设光线沿直线传播且在传播过程中不会衰减, 椭圆的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ,

则光线从椭圆一个焦点出发, 到首次回到该焦点所经过的路程可能为

- A. 2
- B. 8
- C. 10
- D. 12

11. 沙漏, 据《隋志》记载: “漏刻之制, 盖始于黄帝”. 它是古代的一种计时装置, 由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成, 开始时细沙全部在上部容器中, 细沙通过连接管道全部流到下部容器所需要的时间称为该沙漏的一个沙时. 如图, 某沙漏由上下两个圆锥组成, 圆锥的底面直径和高均为 6cm, 细沙全部在上部时, 其高度为圆锥高度的  $\frac{2}{3}$  (细管长度忽略不计). 假设该沙漏每秒钟漏下  $0.02\text{cm}^3$  的沙, 且细沙全部漏入下部后, 恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆. 以下结论正确的是

- A. 沙漏的侧面积是  $9\sqrt{5}\pi\text{cm}^2$
- B. 沙漏中的细沙体积为  $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$
- C. 细沙全部漏入下部后此锥形沙堆的高度约为 2.4cm
- D. 该沙漏的一个沙时大约是 837 秒 ( $\pi \approx 3.14$ )



12. 如图所示的三角数阵, 其中第  $m$  行 (从上到下), 第  $n$  列 (从左到右) 的数表示为  $a_{mn}$ , 且  $a_{m1}=1$ , 当  $m \geq n \geq 2$  时, 有  $na_{mn} = (m-n+1)a_{m(n-1)}$ , 则下列说法正确的是

A.  $a_{43}=1$

B.  $a_{mn} = C_m^n$

C.  $a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{44} + \dots + a_{(n-1)(n-1)}a_{nn} < 1 (n \geq 2)$

D.  $a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + a_{m4} + \dots + a_{mm} = \frac{1}{m}(2^m - 1)$

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \dots \end{matrix}$$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 二项式  $(x + \frac{2}{\sqrt{x}})^6$  展开式中常数项是\_\_\_\_\_。(填数字)

14. 写出过抛物线  $y^2 = 4x$  上的点  $P(1, t)$  且与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  相切的一条直线的方程\_\_\_\_\_.

15. 某校为促进拔尖人才培养开设了数学、物理、化学、生物、信息学五个学科竞赛课程, 现有甲、乙、丙、丁四位同学要报名竞赛课程, 由于精力和时间限制, 每人只能选择其中一个学科的竞赛课程, 则恰有两位同学选择数学竞赛课程的报名方法数为\_\_\_\_\_.

16. 已知  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  在定义域上的导函数, 且  $f'(x) + f(x) = e^{1-x}$ ,  $f(1) = 1$ , 若函数  $mf(x) = \ln(mx) - x + 2 (m > 0)$  在区间  $(0, +\infty)$  内存在零点, 则实数  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知  $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x - \cos^2\omega x (\omega > 0)$  的最小正周期为  $\pi$ .

(1) 求  $f(\frac{\pi}{6})$  的值;

(2) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 若  $(2a-c)\cos B = b\cos C$ , 求角  $B$  的大小以及  $f(A)$  的取值范围.

18. (12 分)

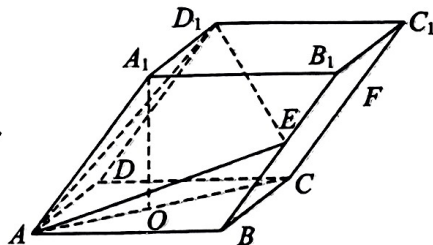
已知  $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$  是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

(1) 求  $a_n$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{(\cos n\pi)a_n\}$  前  $2n$  项的和  $S_{2n}$ .

19. (12分)

如图，平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的所有棱长均为  $\sqrt{2}$ ，底面  $ABCD$  为正方形， $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \frac{\pi}{3}$ ，点  $E$  为  $BB_1$  的中点，点  $F$  为  $CC_1$  的中点，动点  $P$  在平面  $ABCD$  内。



- (1) 若  $O$  为  $AC$  中点，求证  $A_1O \perp AO$ ；
- (2) 若  $FP \parallel$  平面  $D_1AE$ ，求线段  $CP$  长度的最小值。

20. (12分)

在过去三年防疫攻坚战中，我国的中医中药起到了举世瞩目的作用。某公司收到国家药品监督管理局签发的散寒化湿颗粒《药品注册证书》，散寒化湿颗粒是依据第六版至第九版《新型冠状病毒肺炎诊疗方案》中的“寒湿疫方”研制的中药新药。初期为试验这种新药对新冠病毒的有效率，把该药分发给患有相关疾病的志愿者服用。

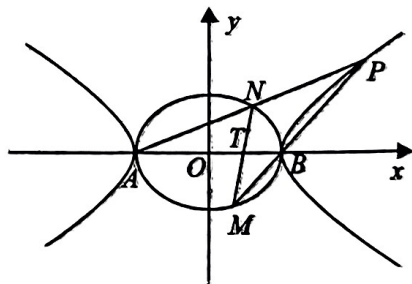
(1) 若 10 位志愿者中恰有 6 人服药后有效，从这 10 位患者中选取 3 人，以  $\xi$  表示选取的人中服药后有效的人数，求  $\xi$  的分布列和数学期望；

(2) 若有 3 组志愿者参加试验，甲，乙，丙组志愿者人数分别占总数的 40%，32%，28%，服药后，甲组的有效率为 64%，乙组的有效率为 75%，丙组的有效率为 80%，从中任意选取一人，发现新药对其有效，计算他来自乙组的概率。

21. (12分)

如图，双曲线的中心在原点，焦距为  $2\sqrt{7}$ ，左、右顶点分别为  $A, B$ ，曲线  $C$  是以双曲线的实轴为长轴，虚轴为短轴，且离心率为  $\frac{1}{2}$  的椭圆，设  $P$  在第一象限且在双曲线上，直线  $BP$  交椭圆于点  $M$ ，直线  $AP$  与椭圆交于另一点  $N$ 。

- (1) 求椭圆及双曲线的标准方程；
- (2) 设  $MN$  与  $x$  轴交于点  $T$ ，是否存在点  $P$  使得  $x_P = 4x_T$  (其中  $x_P, x_T$  为点  $P, T$  的横坐标)，若存在，求出  $P$  点的坐标，若不存在，请说明理由。



22. (12分)

已知函数  $f(x) = \sin x - a \ln(x+1)$ 。

- (1) 当  $a=1$  时，证明：当  $x \in [0, 1]$  时， $f(x) \geq 0$ ；
- (2) 当  $x \in [0, \pi]$  时， $f(x) \leq 2e^x - 2$  恒成立，求  $a$  的取值范围。