

绝密★启用前

2024 届新高三秋季入学摸底考试

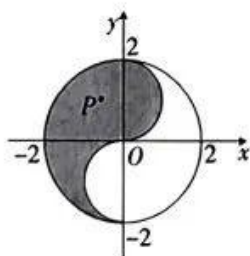
数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbf{N} | x(x-3) \leq 0\}$, $Q = \{x | x \geq 2\}$, 则 $P \cap Q =$
A. $\{2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{0, 2, 3\}$
2. 已知复数 $z = \frac{1+3i}{1+i}$, 则 z 的虚部为
A. i B. -1 C. 2 D. 1
3. 函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ 的零点所在区间是
A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$
4. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = \begin{cases} n^2, & n \leq 5, \\ 5n-4, & n > 5, \end{cases}$ 则 $a_6 =$
A. 1 B. 5 C. 7 D. 9
5. 已知向量 $a = (\sin x, \sqrt{3} \cos x)$, $b = (1, -1)$, 函数 $f(x) = a \cdot b + 1$, 则 $f(x)$ 图象的一条对称轴的方程是
A. $x = \frac{\pi}{6}$ B. $x = -\frac{\pi}{6}$ C. $x = \frac{\pi}{3}$ D. $x = -\frac{\pi}{3}$
6. “太极图”因其形状如对称的阴阳两鱼互抱在一起, 故也被称为“阴阳鱼太极图”。如图是放在平面直角坐标系中的“太极图”, 图中曲线为圆或半圆, 已知点 $P(x, y)$ 是阴影部分(包括边界)的动点, 则 $\frac{y}{x-2}$ 的最小值为



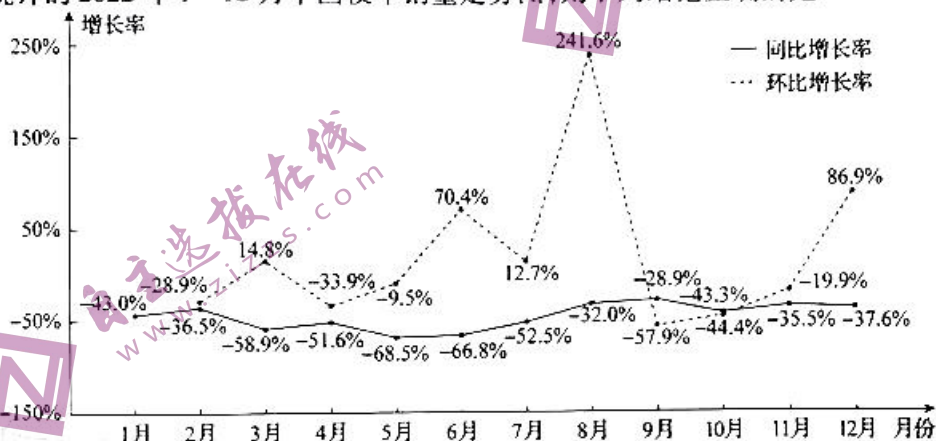
- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1
7. 已知函数 $f(x) = 2x \ln x$ 的极小值为 a , 极小值点为 b , 零点为 c . 若底面半径为 1 的圆锥的高 $h = a + 2b + c$, 则该圆锥的体积为
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. π

数学 第 1 页(共 4 页)

8. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 且过点 $M(a, b)$, 直线 l 与 x 轴交于点 C , 点 D 在 E 的右支上, 且满足 $\overrightarrow{MD} = \lambda \overrightarrow{MC}$, 则 $\lambda =$
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 在我们发布的各类统计数据中, 同比和环比都是反映增长速度的核心数据指标. 如图是某专业机构统计的 2022 年 1—12 月中国校车销量走势图, 则下列结论正确的是



- A. 8 月校车销量的同比增长率与环比增长率都是全年最高
B. 1—12 月校车销量的同比增长率的平均数小于环比增长率的平均数
C. 1—12 月校车销量的环比增长率的极差大于同比增长率的极差
D. 1—12 月校车销量的环比增长率的方差小于同比增长率的方差
10. 已知 $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$, 且 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 则
- A. $\sin \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$ B. $\tan \alpha = 5$
C. $\cos 2\alpha = -\frac{24}{25}$ D. $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{17\sqrt{2}}{50}$
11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, $g(-x) = g(x)$, 且 $g(0) = 1$, 则
- A. $g(1) = 0$ B. $f(x)$ 为奇函数
C. $g(x) = g(x+4)$ D. $\sum_{k=1}^{2023} g(k) = -1$
12. 已知正六棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 1, 所有顶点均在球 O 的球面上, 则
- A. 直线 DE' 与直线 AF' 异面
B. 若 M 是侧棱 CC' 上的动点, 则 $AM + ME'$ 的最小值为 7
C. 直线 AF' 与平面 DFE' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$
D. 球 O 的表面积为 17π

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 数据 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6 的 75% 分位数为 _____.
14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 是 C 上的动点, $\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 3, 则 C 的长轴长的最小值为 _____.

15. 已知 $(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中只有第5项的二项式系数最大, 写出展开式中的一个有理项_____.

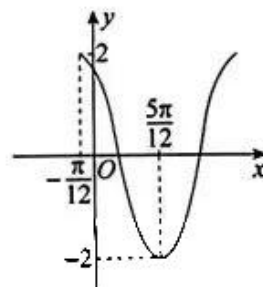
16. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos B = \frac{2}{3}$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点. 若点 P 满足 $\vec{CP} + \frac{b}{c}\vec{BP} = \frac{a}{c}\vec{PA}$, 且 $\vec{BP} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$, 则 $x + y$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象.

(1) 求 $g(x)$ 的解析式;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $g(A) = +\sqrt{3}$, $AB = 2, AC = 5$, 求 BC .



18. (12分) 记公比不为1的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_3, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, S_3$ 成等差数列.

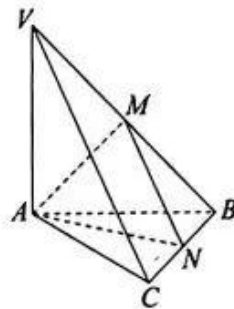
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{2n-1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VA \perp$ 平面 ABC , $VA = AB = 2BC = 2, AB \perp BC$, M 是 VB 的中点, N 为 BC 上的动点.

(1) 证明: 平面 $AMN \perp$ 平面 VBC ;

(2) 当 $VC \parallel$ 平面 AMN 时, 求平面 AMN 与平面 ABC 夹角的余弦值.



20. (12分) 研学旅行作为一种新兴的教学方式,越来越受中学生的青睐,国家也颁布了一系列政策推进研学旅行发展. 为了解学生对“暑期研学旅行”的满意度,某教育部门对200名中学生进行了问卷调查,部分结果如下表. 参与问卷调查的男女比例为3:2.

(1) 完成下面的 2×2 列联表,并判断是否有99.9%的把握认为“暑期研学旅行”的满意度与性别有关联;

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男生	100		
女生		30	
合计			

(2) 该教育部门采用分层随机抽样的方法从参与问卷调查持“不满意”态度的学生中抽取了5名学生. 现从这5名学生中随机抽取3人进行座谈,记抽取的女生人数为 X ,求 X 的分布列及数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12分) 已知抛物线 $C: x^2 = 8y$, F 为 C 的焦点,过点 F 的直线 l 与 C 交于 H, I 两点,且在 H, I 两点处的切线交于点 T .

(1) 当 l 的斜率为 -1 时,求 $|HI|$;

(2) 证明: $FT \perp HI$.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax$, $g(x) = xe^{x-1} + x \ln x$, $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为 $f(x)$,

$g(x)$ 的导函数,且对任意的 $x_1 \in (0, 1]$,存在 $x_2 \in (0, 1]$,使 $f'(x_1) \leq g'(x_2) - 2$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $\forall x > 0$,有 $g(x) \geq f'(x)$.

2024 届新高三秋季入学摸底考试 数学参考答案及评分细则

1. 【答案】C

【解析】因为 $P = \{x \in \mathbf{N} | x(x-3) \leq 0\} = \{0, 1, 2, 3\}$, 所以 $P \cap Q = \{2, 3\}$. 故选 C.

2. 【答案】D

【解析】因为 $z = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1-i^2} = 2+i$, 所以复数 z 的虚部为 1. 故选 D.

3. 【答案】A

【解析】易知 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{\frac{1}{4}} - 2 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$. 故选 A.

4. 【答案】A

【解析】由 $S_n = \begin{cases} n^2, n \leq 5, \\ 5n-4, n > 5, \end{cases}$ 得 $S_5 = 25$, $S_6 = 26$, 所以 $a_6 = S_6 - S_5 = 26 - 25 = 1$. 故选 A.

5. 【答案】B

【解析】由题意 $f(x) = a \cdot b + 1 = \sin x - \sqrt{3} \cos x + 1 = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. 令 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$; 当 $k = -1$ 时, $x = -\frac{\pi}{6}$. 故选 B.

6. 【答案】C

【解析】记 $A(2, 0)$, 则 $k = \frac{1}{x-2}$ 为直线 AP 的斜率, 故当直线 AP 与半圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1 (x > 0)$ 相切时, 得 k 最小, 此时设 $AP: y = k(x-2)$, 故 $\frac{|-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = -\frac{4}{3}$ 或 $k = 0$ (舍去), 即 $k_{\min} = -\frac{4}{3}$. 故选 C.

7. 【答案】B

【解析】由题意得 $f'(x) = 2(\ln x + 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$, 则当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 的极小值 $a = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$, 极小值点 $b = \frac{1}{e}$. 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 所以 $c = 1$, 所以 $h = a + 2b + c = 1$, 所以该圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3}$. 故选 B.

8. 【答案】D

【解析】由题意知 $c = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\therefore a = 2b$, $\therefore M(2b, b)$, 故直线 l 的方程为 $y - b = -\frac{1}{2}(x - 2b)$. 令 $y = 0$, 得 $x = 4b$, 所以 $C(4b, 0)$. 又因为 $\overrightarrow{MD} = \lambda \overrightarrow{MC}$, 所以 $D((2\lambda + 2)b, (1 - \lambda)b)$, 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 化简得 $4(\lambda + 1)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - (1 - \lambda)^2 = 1$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$. 故选 D.

9. 【答案】BC

【解析】2022 年 8 月校车销量的同比增长率比 9 月的低, 故 A 错误; 由校车销量走势图知 1—12 月校车销量的同比增长率的平均数为负数, 环比增长率的平均数是正数, 故 B 正确; 1—12 月校车销量的环比增长率的极差为 $241.6\% - (-57.9\%) = 299.5\%$, 同比增长率的极差为 $(-28.9\%) - (-68.5\%) = 39.6\%$, 所以环比增长率的极差大于同

比增长率的极差,故 C 正确;由校车销量走势图知 1—12 月校车销量的环比增长率的波动大于同比增长率的,所以环比增长率的方差大于同比增长率的方差,故 D 错误. 故选 BC.

10. 【答案】ACD

【解析】因为 $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$, 且 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 所以 $\sin \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{7\sqrt{2}}{10}}{-\frac{\sqrt{2}}{10}} = 7$, 故 A 正确, B 错误;

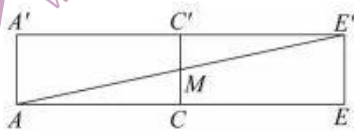
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 - \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2 = -\frac{24}{25}$, 故 C 正确; $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{7}{25}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{7}{25} - \frac{24}{25}\right) = -\frac{17\sqrt{2}}{50}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

11. 【答案】ACD

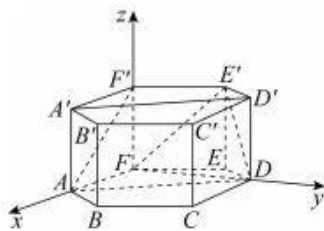
【解析】由 $f(x) = f(2-x)$, 等式两边同时求导, 得 $f'(x) = -f'(2-x)$, 即 $g(x) + g(2-x) = 0$, 故 $g(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 A 正确; 因为 $g(x) = g(-x)$, 所以 $f(x)$ 应满足 $f(x) = -f(-x) + C$ (C 为常数), 当 $C \neq 0$ 时, $f(x)$ 不是奇函数, 故 B 错误; 因为 $g(x) = g(-x)$, $g(x) + g(2-x) = 0$, 所以 $g(x) = g(x+4)$, 故 C 正确; 因为 $g(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 关于 y 轴对称, 且 $g(0) = 1$, 所以 $g(1) = 0, g(2) = -1, g(3) = 0, g(4) = 1$, 所以 $\sum_{k=1}^{2023} g(k) = g(1) + g(2) + \dots + g(2023) = g(1) + g(2) + g(3) = -1$, 故 D 正确. 故选 ACD.

12. 【答案】BCD

【解析】对于 A, 如题图, 连接 $AD, A'D'$, 则 $AD \parallel A'D', A'D' \parallel E'F'$, 所以 $AD \parallel E'F'$, 所以直线 DE' 与直线 AF' 共面, 故 A 错误; 对于 B, 将平面 $ACC'A'$ 沿着 CC' 翻折到与平面 $CCE'C'$ 共面的位置, 得到图形 $1E'E'A'$, 如图 1 所示. 因为底面边长为 2, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $AC = CE' = 2\sqrt{3}$, 则 $A'E' = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 1^2} = 7$, 故 B 正确; 对于 C, 以 F 为坐标原点, FA, FD, FF' 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图 2 所示空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), F(0, 0, 1), E(0, 0, 0), D(0, 2\sqrt{3}, 0), E'(-1, \sqrt{3}, 1)$, 所以 $\vec{AF}' = (-2, 0, 1), \vec{FE} = (0, 2\sqrt{3}, 0), \vec{FE}' = (-1, \sqrt{3}, 1)$. 设平面 DFE' 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{FE} \cdot m = 0, \\ \vec{FE}' \cdot m = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2\sqrt{3}y = 0, \\ -x + \sqrt{3}y + z = 0. \end{cases}$ 令 $z = 1$, 得 $x = 1$, 所以平面 DFE' 的一个法向量为 $m = (1, 0, 1)$. 设直线 AF' 与平面 DFE' 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\vec{AF}' \cdot m|}{|\vec{AF}'| |m|} = \frac{|-2+1|}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 故 C 正确; 对于 D, 设球 O 的半径为 R , 则 $R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{17}{4}$, 所以球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{17}{4} = 17\pi$, 故 D 正确. 故选 BCD.



图①



图②

13. 【答案】4.5 (写成 $\frac{9}{2}$ 也给分)

【解析】因为 $8 \times 0.75 = 6$, 所以 75% 分位数为 $\frac{4+5}{2} = 4.5$.

14. 【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】由题意知 $\frac{1}{2} \times 2c \cdot b = 3$, 所以 $bc = 3$, 故 C 的长轴长 $2a = 2\sqrt{b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{2bc} = 2\sqrt{6}$.

15. 【答案】 x^4 (或 $1120x$, 或 $256x^{-2}$, 写出其中一个即可)

【解析】由题意知展开式中共有 9 项, 所以 $n = 8$, 所以 $(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r = C_8^r (-2)^r x^{4-\frac{3}{2}r}$, $0 \leq r \leq 8, r \in \mathbf{Z}$. 若 T_{r+1} 为有理项, 则 $4 - \frac{3}{2}r \in \mathbf{Z}$, 所以 $r = 0, 4, 8$, 故展开式中所有的有理项为 $T_1 = C_8^0 (-2)^0 x^4 = x^4, T_5 = C_8^4 (-2)^4 x^{4-\frac{3}{2} \times 4} = 1120x, T_9 = C_8^8 (-2)^8 x^{4-\frac{3}{2} \times 8} = 256x^{-2}$.

16. 【答案】 $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

【解析】由 $\vec{CP} + \frac{b}{c}\vec{BP} = \frac{a}{c}\vec{PA}$, 得 $a\vec{PA} + b\vec{PB} + c\vec{PC} = \mathbf{0}$, 即 $-a\vec{AP} + b(\vec{AB} - \vec{AP}) + c(\vec{AC} - \vec{AP}) = \mathbf{0}$, 整理可得 $(a+b+c)\vec{AP} = b\vec{AB} + c\vec{AC} = bc \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, 故点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上, 同理可得点 P 在 $\angle BCA$ 的平分线上, 所以点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心. 如图, 延长 BP , 交 AC 于点 D , 过点 P 作 $PE \perp AC, PF \perp AB$, 垂足分别为 E, F , 设 $\vec{BP} = \lambda \vec{BD}, 0 < \lambda < 1$. 由 $\vec{BP} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$, 得 $\vec{BD} = \frac{x}{\lambda}\vec{BA} + \frac{y}{\lambda}\vec{BC}$. 由 D, A, C 三点共线得 $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda} = 1$, 所以 $x + y = \lambda = \frac{BP}{BD} = \frac{BP}{BP + PD} = \frac{1}{1 + \frac{PD}{BP}} \leq \frac{1}{1 + \frac{PF}{BP}} = \frac{1}{1 + \frac{PF}{BP}}$. 因为 $\cos \angle ABC = \frac{2}{3}$, 所以 $\sin \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 代入得 $\lambda \leq \frac{6-\sqrt{6}}{5}$. 当且仅当 $PD = PF$, 即 $PD \perp AC$ 时等号成立, 故 $x + y$ 的最大值为 $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$.



17. 解: (1) 由图象可知 $\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2$.

又因为最高点是 $\left(-\frac{\pi}{12}, 2\right)$,

所以 $\left(-\frac{\pi}{12}\right) \times 2 + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

即 $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $k = 0, \varphi = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$. (3分)

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$ 的图象,

再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x) = 2\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象. (5分)

(2) 因为 $g(A) = -2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$,

所以 $\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$,

所以 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$. (8分)

由余弦定理, 得 $BC^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 19$, 所以 $BC = \sqrt{19}$. (10分)

【评分细则】

第(1)问只要形式正确也给分.

18. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, S_3$ 成等差数列, 得 $a_3 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{9}{2}$. (1分)

法一: 因为 $q \neq 1$, 所以 $\begin{cases} \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{9}{2}, \\ a_1q^2 = \frac{3}{2}, \end{cases}$ 所以 $a_1 = 6, q = -\frac{1}{2}$, 则 $a_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (5分)

法二: 由题意得 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{9}{2}, a_3 = a_1q^2 = \frac{3}{2}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = 6, \\ q = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2}, \\ q = 1 \end{cases}$ (舍去). (4分)

所以 $a_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (5分)

(2) 因为 $a_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, b_n = -\frac{1}{12}(2n-1) \cdot (-2)^n$. (6分)

所以 $T_n = -\frac{1}{12} \times [1 \times (-2)^1 + 3 \times (-2)^2 + \dots + (2n-1) \cdot (-2)^n]$. (7分)

则 $-2T_n = -\frac{1}{12} \times [1 \times (-2)^2 + 3 \times (-2)^3 + \dots + (2n-1) \cdot (-2)^{n+1}]$,

所以 $-36T_n = -2 + 2 \times [(-2)^2 + (-2)^3 + \dots + (-2)^n] - (2n-1) \cdot (-2)^{n+1}$

$= -2 + 2 \times \frac{(-2)^2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} - (2n-1) \cdot (-2)^{n+1}$

$= \frac{2}{3} - \left(2n - \frac{1}{3}\right) \cdot (-2)^{n+1}$

所以 $T_n = \frac{6n-1}{27} \cdot (-2)^{n-1} - \frac{1}{54}$. (12分)

【评分细则】

1. a_n 和 T_n 用其它形式表示, 结果正确也给分.

2. 第(1)问未舍去 $q=1$ 的解, 结果保留 2 种情况, 若无误, 整题扣 4 分.

19. (1) 证明: 因为 $VA \perp$ 平面 $ABC, VA \subset$ 平面 VAB ,

所以平面 $VAB \perp$ 平面 ABC .

又 $AB \perp BC$, 平面 $VAB \cap$ 平面 $ABC = AB, BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $BC \perp$ 平面 VAB .

又 $AM \subset$ 平面 VAB , 所以 $BC \perp AM$. (2分)

又 $VA = AB, M$ 是 VB 的中点,

所以 $AM \perp VB$. (3分)

又 $VB \cap BC = B, VB, BC \subset$ 平面 VBC ,

所以 $AM \perp$ 平面 VBC .

因为 $AM \subset$ 平面 AMN ,

所以平面 $AMN \perp$ 平面 VBC . (4分)

(2)解:以 A 为坐标原点, AB, AV 所在直线分别为 y, z 轴, 过点 A 作与 BC 平行的直线为 x 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $VC \parallel$ 平面 $AMN, VC \subset$ 平面 VBC , 平面 $AMN \cap$ 平面 $VBC = MN$, 所以 $VC \parallel MN$.

又 M 是 VB 的中点, 所以 N 是 BC 的中点,

则 $A(0,0,0), V(0,0,2), M(0,1,1), N(\frac{1}{2}, 2, 0)$,

所以 $\vec{AM} = (0, 1, 1), \vec{AN} = (\frac{1}{2}, 2, 0), \vec{AV} = (0, 0, 2)$, (6分)

则平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{AV} = (0, 0, 2)$. (7分)

设平面 AMN 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

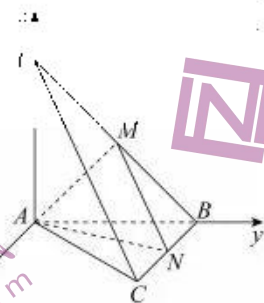
$$\text{则} \begin{cases} \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0, \\ \vec{AN} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y + z = 0, \\ \frac{1}{2}x + 2y = 0. \end{cases}$$

令 $y = 1$, 得 $x = -4, z = -1$, 所以平面 AMN 的一个法向量为 $\vec{n} = (-4, 1, -1)$. (9分)

设平面 AMN 与平面 ABC 的夹角为 θ ,

$$\text{所以} \cos \theta = \frac{|\vec{AV} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AV}| |\vec{n}|} = \frac{|-2|}{2 \times \sqrt{(-4)^2 + 1 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ (11分)}$$

故平面 AMN 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. (12分)



【评分细则】

- 第(1)问若用其它方法证明,酌情给分.
- 第(2)问也可不用空间向量法求解,只要解答过程无误,给满分.

20. 解:(1)男生人数为 $200 \times \frac{3}{5} = 120$, 女生人数为 $200 \times \frac{2}{5} = 80$, (1分)

则 2×2 列联表如下表所示:

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男生	100	20	120
女生	50	30	80
合计	150	50	200

(2分)

根据列联表中的数据,得 $\chi^2 = \frac{200 \times (100 \times 30 - 20 \times 50)^2}{150 \times 80 \times 120 \times 50} = \frac{100}{9} \approx 11.111 > 10.828$,

所以有 99.9% 的把握认为“暑期研学旅行”的满意度与性别有关。(6 分)

(2) 抽取的男生有 $5 \times \frac{2}{5} = 2$ 人,女生有 $5 \times \frac{3}{5} = 3$ 人,(7 分)

则 X 的可能取值为 1, 2, 3,

$$P(X=1) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \text{ (10 分)}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(11 分)

$$\text{故 } EX = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}. \text{ (12 分)}$$

【评分细则】

第(2)问的结果写成 1.8 也给分.

21. (1) 解:由题意知 $F(0, 2)$,

当 l 的斜率为 -1 时 l 的方程为 $x = -x + 2$, (1 分)

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 8y, \\ y = -x + 2, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 12x + 4 = 0,$$

设 $H(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 12$. (3 分)

故 $|BH| = y_1 - y_2 + p = 16$. (4 分)

(2) 证明:根据题意知直线 l 的斜率存在,

设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 8y, \\ y = kx + 2, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 8kx - 16 = 0,$$

所以 $\Delta = (-8k)^2 + 64 > 0, x_1 + x_2 = 8k, x_1 x_2 = -16$. (5 分)

对 $y = \frac{1}{8}x^2$ 求导,得 $y' = \frac{1}{4}x$.

$$\text{由 } \begin{cases} y - y_1 = \frac{1}{4}x_1(x - x_1), \\ y - y_2 = \frac{1}{4}x_2(x - x_2), \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 4k, \\ y = -2, \end{cases}$$

所以 $T(4k, -2)$. (8 分)

当 $k=0$ 时, $T(0, -2)$. 显然 $FT \perp HI$; (9 分)

当 $k \neq 0$ 时, $k_{FT} \cdot k_{HI} = -\frac{1}{k} \cdot k = -1$,

所以 $FT \perp HI$, (11 分)

综上, $FT \perp HI$. (12 分)

【评分细则】

1. 第(2)问未考虑 $k=0$ 的情况,扣 1 分.

2. 第(2)问若用其它方法证明,过程结果无误给满分.

22. (1) 解: 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax$,

$$\text{所以 } f'(x) = x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4},$$

所以 $f'(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递增,

$$\text{故 } f'(x)_{\max} = f'(1) = a + 2. \quad (1 \text{ 分})$$

因为 $g(x) = xe^{x-1} + x \ln x$,

$$\text{所以 } g'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} + \ln x + 1 = (x+1)e^{x-1} + \ln x + 1.$$

$$\text{令 } h(x) = (x+1)e^{x-1} + \ln x + 1, \text{ 则 } h'(x) = (x+2)e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0,$$

故 $g'(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g'(x)_{\max} = g'(1) = 3. \quad (3 \text{ 分})$$

又对任意的 $x_1 \in (0, 1]$, 存在 $x_2 \in (0, 1]$, 使 $f'(x_1) \leq g'(x_2) - 2$,

$$\text{所以 } f'(x)_{\max} \leq g'(x)_{\max} - 2. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{即 } a + 2 \leq 3 - 2, \text{ 解得 } a \leq -1.$$

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$. (5 分)

(2) 证明: 令 $s(x) = e^{x-1} - x, x > 0$, 则 $s'(x) = e^{x-1} - 1$.

令 $s'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $s'(x) < 0$, $s(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $s'(x) > 0$, $s(x)$ 单调递增,

所以 $s(x) \geq s(1) = 0$, 即 $e^{x-1} \geq x$ (当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立). (7 分)

$$\text{令 } F(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, \text{ 则 } F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

令 $F'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

所以 $F(x) \geq F(1) = 0$, 即 $\ln x \geq -\frac{1}{x} + 1$ (当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立). (9 分)

$$\text{故 } e^{x-1} + \ln x \geq x - \frac{1}{x} + 1 \text{ (当且仅当 } x = 1 \text{ 时, 等号成立).} \quad (10 \text{ 分})$$

又 $x > 0$, 所以 $xe^{x-1} + x \ln x \geq x^2 + x - 1$.

因为 $a \leq -1$, 所以 $x^2 + x - 1 \geq x^2 + x + a$,

$$\text{故 } xe^{x-1} + x \ln x \geq x^2 + x + a,$$

$$\text{即 } g(x) \geq f'(x). \quad (12 \text{ 分})$$

【评分细则】

1. 第(1)问的结果写成集合形式也给分.
2. 第(2)问若用其它方法证明, 酌情给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

 自主选拔在线