23 高三三模文科数学参考答案

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. C　2. D　3. A　4. A　5. B　6. B

7. B　8. C　9. D　10. C　11. B　12. D

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\frac{1}{3}$　14. $\frac{1}{2}$　15. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　16. $\sqrt{3}$

三、解答题：（共 70 分）

17. 证明：(1)因为数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}\cdot a_n+2a_{n+1}-2a_n=0$，

整理得$a_{n+1}\cdot a_n=2a_n-2a_{n+1}$，………………………………2 分

故$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$，………………………………5 分

所以$\{\frac{1}{a_n}\}$是以 1 为首项，以$\frac{1}{2}$为公差的等差数列．………………………………6 分

(2)由(1)知$\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$，所以$a_n=\frac{2}{n+1}$，………………………………7 分

所以$b_n=a_{n+1}\cdot a_n=\frac{2}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}=4(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，………………………………8 分

所以$T_n=4\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=2-\frac{4}{n+2}$，

所以数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=2-\frac{4}{n+2}$．………………………………12 分

18. 解：(1) 补充 2×2 列联表为：

	没有兴趣	有兴趣	合计
男	280	320	600
女	240	160	400
合计	520	480	1000

因为$k=\frac{1000(280\times160-320\times240)^2}{520\times480\times600\times400}\approx17.094>10.828$，………………………………5 分

所以有 99.9%的把握认为对该项目有兴趣与性别有关．………………………………6 分

(2)按照分层抽样，从没有兴趣的学生中抽取 6 人，抽样比为 1：80，所以男生应抽取 4 人，

记为A_1,A_2,A_3,A_4；女生应抽取 2 人，记为B_1,B_2．………………………………7 分

从 6 人中选出 2 人，总的抽取方法有 $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_1, A_1B_2, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_2$，

$A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_1, A_4B_2, B_1B_2$，共有 15 种，……………………………………………9 分

选出的 2 人均为男生的方法有 $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4$，共有 6 种，

…………11 分

故选出的 2 人中均为男生的概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$．……………………………………………………12 分

19．解：(1)因为侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，

又底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $AB\perp AD$，

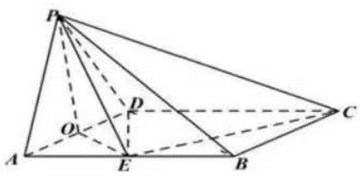
所以 $AB\perp$平面 PAD．……………………………………………………………………………3 分

又 $PD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp PD$，

又 $PD\perp PA$，且 $PA\cap AB=A$，所以 $PD\perp$平面 PAB，又 $PD\subset$平面 PDE，

所以平面 $PDE\perp$平面 PAB，即平面 $PAE\perp$平面 PDE．………………………………6 分

(2)当 E 为 AB 的中点时，取 AD 中点 O，连接 OP，OE．



因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$．

因为侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，

所以 $PO\perp$底面 $ABCD$．……………………………………………………………………7 分

因为 $PA\perp PD$，$AD=4$，所以 $PA=PD=2\sqrt{2}$，$PO=2$．

在 Rt$\triangle AOE$ 中，$AE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$，$AO=2$，所以 $OE=2\sqrt{3}$，

则在 Rt$\triangle POE$ 中，$PE=4$；又在 Rt$\triangle ADE$ 中，$DE=2\sqrt{6}$．

在$\triangle PDE$ 中，由 $PD=2\sqrt{2}$，$PE=4$，$DE=2\sqrt{6}$，得 $PD^2+PE^2=DE^2$，

所以 $PD\perp PE$，所以 $S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}PD\cdot PE=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$．……………………9 分

因为 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD\cdot AD=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，

所以$V_{P-CDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot PO=\frac{1}{3}\times 8\sqrt{2}\times 2=\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

设点C到平面PDE的距离为h，则由$V_{C-PDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle PDE}\cdot h=V_{P-CDE}$，

解得：$h=4$.

所以点C到平面PDE的距离为4. ……………………………………………………12分

20. 解：(1)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ……………………………………………1分

因为$f(x)=\frac{a}{x^2}+2\ln x$，则$f'(x)=-\frac{2a}{x^3}+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2a}{x^3}$.

当$a=1$时，$f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$. …………………………………………2分

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，故函数$f(x)$在$x\in(0,1)$上单调递减；……………………3分

当$x>1$时，$f'(x)>0$，故函数$f(x)$在$x\in(1,+\infty)$上单调递增. ……………………4分

综上所述，$f(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间$(1,+\infty)$. ……………………5分

(2)因为$g(x)=x^3-x^2$，$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$，

又$x\in[1,2]$，则$g'(x)>0$，故函数$g(x)$在$[1,2]$上单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(1)=0$. …………………………………………………………………6分

所以对任意的$x\in(0,2]$，$xf(x)\geq 0$恒成立，即$\frac{a}{x}+2x\ln x\geq 0$恒成立，

所以$a\geq -2x^2\ln x$恒成立. ……………………………………………………………7分

令$h(x)=-2x^2\ln x(x\in(0,2])$，则$h'(x)=-2x-4x\ln x=-2x(1+2\ln x)$，$x\in(0,2]$，

令$h'(x)=0$，得$1+2\ln x=0$，解得$x=e^{-\frac{1}{2}}$. ………………………………………9分

当$x\in\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$时，$h'(x)>0$，所以函数$h(x)$在$\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$上单调递增；

当$x\in\left(e^{-\frac{1}{2}},2\right)$时，$h'(x)<0$，所以函数$h(x)$在$\left(e^{-\frac{1}{2}},2\right)$上单调递减.

所以$h(x)_{\max}=h\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{e}$，故$a\geq\frac{1}{e}$. ……………………………………………11分

所以实数 a 的取值范围是

$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. ……………………………………………………………………………12 分

21．解：(1)设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1$ $(m>0,n>0,且m\neq n)$，

因为椭圆 C 过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ 与点 $B(2,0)$，

则有 $\begin{cases}\frac{m}{4}+\frac{15n}{16}=1\\4m=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{4}\\n=1\end{cases}$. ……………………………………………………3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………4 分

(2)设直线 $l:x=ty+1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty+1\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(ty+1)^2+4y^2-4=0$，

即 $(t^2+4)y^2+2ty-3=0$，则 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$， …………………………6 分

直线 BP，BQ 的方程分别为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

令 $x=3$，则 $E(3,\frac{y_1}{x_1-2})$，$F(3,\frac{y_2}{x_2-2})$， ……………………………………………7 分

则 $\overline{PE}=(3-x_1,\frac{y_1(3-x_1)}{x_1-2})=(2-ty_1,\frac{y_1(2-ty_1)}{ty_1-1})$,

$\overline{QF}=(3-x_2,\frac{y_2(3-x_2)}{x_2-2})=(2-ty_2,\frac{y_2(2-ty_2)}{ty_2-1})$，

所以 $\overline{PE}\cdot\overline{QF}=(2-ty_1)(2-ty_2)+\frac{y_1y_2(2-ty_1)(2-ty_2)}{(ty_1-1)(ty_2-1)}$

$=\left[t^2y_1y_2-2t(y_1+y_2)+4\right]\left[1+\frac{y_1y_2}{t^2y_1y_2-t(y_1+y_2)+1}\right]$

$=\left(\frac{-3t^2}{t^2+4}+\frac{4t^2}{t^2+4}+4\right)\left(1+\frac{\frac{-3}{t^2+4}}{\frac{-3t^2}{t^2+4}+\frac{2t^2}{t^2+4}+1}\right)=\frac{5t^2+16}{4(t^2+4)}=\frac{5(t^2+4)-4}{4(t^2+4)}=\frac{5}{4}-\frac{1}{t^2+4}$. …10 分

因为$t^2+4\geq 4$，所以$0<\frac{1}{t^2+4}\leq\frac{1}{4}$，$1\leq\frac{5}{4}-\frac{1}{t^2+4}<\frac{5}{4}$，

即$\overline{PE}\cdot\overline{QF}$的取值范围为$\left[1,\frac{5}{4}\right)$，

所以$\overline{PE}\cdot\overline{QF}$存在最小值，且最小值为1．……………………………………………12分

22. 解：（1）由题意得直线l的普通方程为$\sqrt{3}x-y+2=0$，……………………………2分

由$\begin{cases}x=\rho\sin\theta,\\ y=\rho\cos\theta,\end{cases}$……………………………………………………………………………………3分

得曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$，

即$x^2+(y-1)^2=1$．………………………………………………………………………………5分

(2) 直线l的参数方程可化为:$\begin{cases}x=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\\ y=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$为参数)，……………………………………6分

将其代入曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$，可得$t^2+5\sqrt{3}t+18=0$，……8分

设A，B的对应的参数分别为t_1，t_2，

则$t_1+t_2=-5\sqrt{3}$，$t_1\cdot t_2=18$，所以$t_1,t_2<0$，

所以$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$．……………………………………………10分

23. 解：(1)当$a=-1$时，所求不等式可化为$|x-1|+|x-3|<4$，……………………1分

当$x\leq 1$时，所求不等式可化为$(1-x)+(3-x)<4$，解得$x>0$，即$0<x\leq 1$，

…………2分

当$1<x<3$时，所求不等式可化为$(x-1)+(3-x)<4$，恒成立，即$1<x<3$，

…………3分

当$x\geq 3$时，所求不等式可化为$(x-1)+(x-3)<4$，解得$x<4$，即$3\leq x<4$．

…………4分

综上，所求不等式的解集为$(0,4)$．………………………………………………………5分

(2)因为$f(x)=|x+a|+|x+3a|\geq|2a|$，所以$|2a|=2$，即$|a|=1$，

$(a-m)(a+m)=\frac{4}{n^2}=a^2-m^2$，所以$m^2+\frac{4}{n^2}=1$，……………………………………7分

所以$\frac{1}{m^2}+n^2=\left(m^2+\frac{4}{n^2}\right)\left(\frac{1}{m^2}+n^2\right)=5+m^2n^2+\frac{4}{m^2n^2}$

$\geq 5+2\sqrt{m^2n^2\cdot\frac{4}{m^2n^2}}=9$(当且仅当$m^2n^2=\frac{4}{m^2n^2}$即$m^2=\frac{1}{3}$，$n^2=6$ 时等号成立)，

…………9 分

所以$\frac{1}{m^2}+n^2$的最小值为 9． ……………………………………………………10 分