天一大联考
2022—2023 学年高三考前定位考试

理科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　由 $A=\{x|x\geqslant 1\}$,$B=\{x||x|\leqslant 2\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=[-2,+\infty)$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查复数的基本运算及几何意义.

解析　由题得 $z=\dfrac{m+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(m+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}=\dfrac{m-2}{2}+\dfrac{m+2}{2}\mathrm{i}$,因为 z 对应的点位于第二象限,所以 $\begin{cases}m-2<0,\\ m+2>0,\end{cases}$ 所以 $-2<m<2$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查分段函数求值.

解析　$f(1)=4^{1-2}=\dfrac{1}{4}$,$\therefore f(f(1))=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\log_2\dfrac{1}{4}=-2$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$,纵坐标不变得到 $y=\sin 2x$ 的图象,再将 $y=\sin 2x$ 图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象. 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时,$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$,$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查二项式定理的应用.

解析　展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r(ax)^{9-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=\mathrm{C}_9^r\cdot a^{9-r}(-1)^r\cdot x^{9-\frac{3r}{2}}$,令 $9-\dfrac{3r}{2}=0$,得 $r=6$,$\therefore$ 常数项是 $T_{6+1}=a^3\cdot\mathrm{C}_9^6=672$,故 $a=2$.

6. 答案　B

命题意图　本题考查平面向量的线性运算.

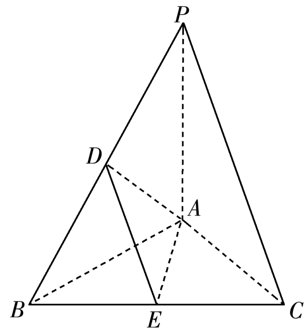
解析　$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$,$\therefore \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}$,$\therefore \overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,$\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查异面直线所成的角的计算.

解析　如图所示,取 BC 的中点 E,连接 AE,DE,则 $DE/\!/PC$,$\angle ADE$ 或其补角即为异面直线 AD 与 PC 所成的角. 容易计算得 $AE=2\sqrt{2}$,$DE=\sqrt{13}$,$DA=\sqrt{13}$,在 $\triangle ADE$ 中,根据余弦定理可得 $\cos\angle ADE=\dfrac{AD^2+DE^2-AE^2}{2AD\times DE}=$

$\frac{13+13-8}{2\times13}=\frac{9}{13}$.



8. **答案** A

命题意图 本题考查分段函数的单调性.

解析 若 $a=0$,$f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\-(x-2)^2,x\geqslant0,\end{cases}$ $\therefore f(x)$的最大值为 0. 若 $a<0$,当 $x<a$ 时,$f(x)>0$,不符合条件. 若 $a>0$,当 $x<a$ 时,$f(x)=-ae^x$ 单调递减,$f(x)<0$,当 $x\geqslant a$ 时,根据二次函数的性质,要使 $f(x)$的最大值为 0,需 $a\leqslant2$. 综上可得 $0\leqslant a\leqslant2$.

9. **答案** D

命题意图 本题考查正弦定理的应用及三角恒等变换.

解析 在$\triangle ABC$中,由 $\sin A=\sin B\cos C$ 可得 $\sin(B+C)=\sin B\cos C$,所以 $\cos B\sin C=0$,因为 $B,C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq0$,且 $\cos B=0$,所以 $B=\frac{\pi}{2}$,又 $A=\frac{\pi}{6}$,可得 $C=\frac{\pi}{3}$,所以$\frac{c+a}{\sin C+\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

10. **答案** C

命题意图 本题考查条件概率的计算.

解析 设该队小组出线为事件 A,该队 1/8 决赛获胜为事件 B,则 $P(A)=0.3+0.6=0.9$,$P(AB)=0.6\times0.9+0.3\times0.3=0.63$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.63}{0.9}=0.7$.

11. **答案** B

命题意图 本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析 设 $P(t^2,2t)$(不妨令 $t>0$),由已知可得 $F(1,0)$,则 $M\left(\frac{t^2+1}{2},t\right)$,所以直线 OM 的方程为 $y=\frac{2t}{t^2+1}x$,设 $k=\frac{2t}{t^2+1}$,则 $k=\frac{2}{t+\frac{1}{t}}\leqslant1$(当且仅当 $t=1$ 时取“=”),所以点 F 到直线 OM 的距离为$\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,即圆 F 的半径最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,面积最大值为$\frac{\pi}{2}$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 根据题意,$f(-x)=-f(x)$,所以 $a=0$,所以 $f(x)=x^3-x$,因为 $f'(x)=3x^2-1$,所以 $y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$,整理得 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$. 设 $g(x)=x^2+\frac{1}{4}$,直线 l 与 $g(x)$的图象相切于点$(x_2,g(x_2))$,因为 $g'(x)=2x$,所以切线方程为 $y-\left(x_2^2+\frac{1}{4}\right)=2x_2(x-x_2)$,整理得

$y=2x_2x-x_2^2+\frac{1}{4}$,则$\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2,\\-2x_1^3=-x_2^2+\frac{1}{4},\end{cases}$ (*) 整理得$\left(\frac{3x_1^2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-2x_1^3-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2=0$. 令

$h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2$,则$h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$.

当x变化时,$h'(x)$,$h(x)$的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↘	$-\frac{7}{108}$	↗	0	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

又$h(-1)>0$,$h(2)>0$,故$h(x)$共有3个零点,一个为0,另外两个分别位于区间$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$和$(1,2)$内,所以方程组(*)有3组解,故满足题中条件的直线l有3条.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

命题意图 本题考查椭圆的基本性质.

解析 设圆柱的底面半径为r,则椭圆短轴长为$2b=2r$,长轴长为$2a=4r$,则$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,离心率为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. **答案** $-\frac{1}{8}$

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 由$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{5}{2}$,得$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$,所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$,故$\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{8}$.

15. **答案** 1

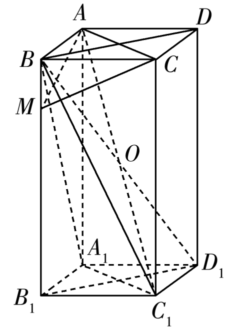
命题意图 本题考查奇函数的性质.

解析 设$g(x)=2^x-2^{-x}$,$h(x)=\ln(e^{2x}+1)-ax$. 因为$g(-x)+g(x)=2^{-x}-2^x+2^x-2^{-x}=0$,所以$g(x)$为奇函数,则$h(x)$为偶函数,则$h(-x)=\ln(e^{-2x}+1)+ax=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right)+ax=\ln(e^{2x}+1)-(2-a)x=h(x)=\ln(e^{2x}+1)-ax$,所以$2-a=a$,$a=1$.

16. **答案** $\left[\frac{19}{9}\pi,11\pi\right]$

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征.

解析 如图所示,当P与点D重合时,过A,C与BP垂直的截面为平面ACC_1A_1,四棱锥$B-ACC_1A_1$的外接球的球心为对角面ACC_1A_1的中心O,直径为$AC_1=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$,此时外接球的表面积最大,最大为$11\pi$. 当$P$与点$D_1$重合时,过$A$,$C$与$BP$垂直的截面为平面$ACM$,在平面$BDD_1B_1$内利用三角形相似可以求得$BM=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$,三棱锥$B-ACM$的外接球直径为$\sqrt{\frac{1}{3^2}+1^2+1^2}=\sqrt{\frac{19}{9}}$,此时外接球的表面积最小,最小为$\frac{19}{9}\pi$.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列与等比数列的基本性质.

解析 (Ⅰ)设$\{a_n\}$的公比为 q. ………………………………………………(1 分)

$\because a_7=8a_4,\therefore a_4q^3=8a_4,\therefore q=2.$ ………………………………………………(2 分)

$\because \frac{1}{2}a_2,a_3-4,a_4-12$ 成等差数列,

$\therefore 2(a_3-4)=\frac{1}{2}a_2+a_4-12,\therefore 2(4a_1-4)=a_1+8a_1-12,\therefore a_1=4.$ ……………………(4 分)

$\therefore a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}.$ ………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)$b_n=(-1)^n\log_2 a_n=(-1)^n(n+1).$ ………………………………………………(7 分)

当 k 为偶数时,$T_k=-2+3-4+5-\cdots-k+(k+1)=\frac{k}{2}$,

令$|T_k|=\frac{k}{2}=20$,得 $k=40$; ………………………………………………(9 分)

当 k 为奇数时,$T_k=T_{k+1}-(k+2)=\frac{k+1}{2}-(k+2)=-\frac{k+3}{2}$,

令$|T_k|=\frac{k+3}{2}=20$,得 $k=37$. ………………………………………………(11 分)

$\therefore k=40$ 或 37. ………………………………………………(12 分)

18. **命题意图** 本题考查相互独立事件的概率计算以及随机变量的分布列与期望.

解析 (Ⅰ)设“小王的该银行卡被锁定”为事件 A,

则 $P(A)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}.$ ………………………………………………(3 分)

(Ⅱ)由题意,X 的所有可能取值为 1,2,3, ………………………………………………(4 分)

则 $P(X=1)=\frac{1}{10},P(X=2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},P(X=3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times 1=\frac{4}{5}$, ……………………(7 分)

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

………………………………………………(8 分)

所以数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{4}{5}=\frac{27}{10}$, ………………………………(10 分)

方差 $D(X)=\left(1-\frac{27}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\left(2-\frac{27}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\left(3-\frac{27}{10}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{41}{100}.$ ……………………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查线面平行的证明以及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)如图,连接 AO,交 BD 于 Q,连接 PQ.

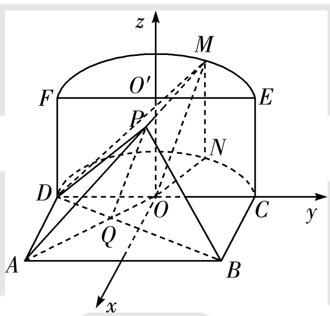
因为 $OD/\!/AB$,由条件可知 $\triangle AQB\backsim\triangle OQD$,所以 $\frac{AQ}{QO}=\frac{AB}{DO}=2$. ……………………………… (2 分)

因为 $AP=2PM$,所以 $MO/\!/PQ$. ……………………………… (3 分)

又 $MO\not\subset$ 平面 PBD,$PQ\subset$ 平面 PBD,所以 $MO/\!/$ 平面 PBD. ……………………………… (4 分)

(Ⅱ)作 $MN\perp$ 平面 $ABCD$ 于 N,则 N 在 $\overset{\frown}{DC}$ 上,连接 ON,则 ON 为 OM 在平面 $ABCD$ 内的射影,所以 $\angle MON$ 为 OM 与底面 $ABCD$ 所成的角,所以 $\angle MON=\frac{\pi}{4}$,所以 $ON=MN=1$. ……………………………… (5 分)

以 O 为坐标原点,过 O 且与 DA 平行的直线为 x 轴,直线 OC 为 y 轴,直线 OO' 为 z 轴,建立空间直角坐标系,如图.



……………………………… (6 分)

因为 $\overset{\frown}{FM}=2\overset{\frown}{ME}$,所以 $\angle CON=\frac{\pi}{3}$,则 $D(0,-1,0)$,$A(1,-1,0)$,$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,

所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{DM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1\right)$. ……………………………… (7 分)

设平面 AMD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则

$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=2$,则 $\boldsymbol{n}=(0,2,-3)$. ……………………………… (9 分)

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$, ……………………………… (10 分)

设平面 AMD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 α,则

$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,所以平面 AMD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)当 $a=\frac{e^2}{2}$ 时,$f(x)=(x-1)e^x-\frac{e^2}{2}x^2$,

则 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-e^2x=x(e^x-e^2)$. ……………………………… (2 分)

令 $f'(x)>0$,得 $x<0$ 或 $x>2$,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<2$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, ……………………………… (4 分)

所以 $f(x)_{极大值}=f(0)=-1$,$f(x)_{极小值}=f(2)=-e^2$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)由 $f(x)+(2-x)e^x\geqslant(2-a)x+a$,得 $e^x-ax^2\geqslant(2-a)x+a$,

即 $e^x-2x\geqslant a(x^2-x+1)$,因为 $x^2-x+1>0$,所以 $a\leqslant\frac{e^x-2x}{x^2-x+1}$. ……………………………… (6 分)

令 $h(x)=\dfrac{e^x-2x}{x^2-x+1}(x\geqslant 0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)(e^x-2)-(2x-1)(e^x-2x)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{(x-1)[(x-2)e^x+2(x+1)]}{(x^2-x+1)^2}$. …………………（8 分）

令 $\varphi(x)=(x-2)e^x+2(x+1)(x\geqslant 0)$，则 $\varphi'(x)=(x-1)e^x+2$.

令 $q(x)=(x-1)e^x+2$，则 $q'(x)=xe^x$，

因为当 $x\geqslant 0$ 时，$q'(x)=xe^x\geqslant 0$，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi'(x)\geqslant\varphi'(0)=1$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$. …………………………（10 分）

所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)_{\min}=h(1)=e-2$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,e-2]$. …………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查双曲线的基本性质，以及双曲线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题意得 E 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a=2b$，…………………（2 分）

又因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5b^2}=2\sqrt{5}$，所以 $b=1$，$a=2$，…………………（3 分）

故 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. …………………………（4 分）

（Ⅱ）显然 l_1,l_2 的斜率都存在且不为 0，设直线 $l_1:y=k(x-\sqrt{5})(k\neq 0)$，$l_2:y=-\dfrac{1}{k}(x-\sqrt{5})$，

因为 l_1,l_2 均与 E 的右支有两个交点，所以 $|k|>\dfrac{1}{2}$，$\left|-\dfrac{1}{k}\right|>\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{4}<k^2<4$. …………………（5 分）

将 l_1 的方程与 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 联立，可得 $(1-4k^2)x^2+8\sqrt{5}k^2x-20k^2-4=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8\sqrt{5}k^2}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-20k^2-4}{1-4k^2}$，…………………（6 分）

$$
\begin{aligned}
\text{所以}|AC|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\
&=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-8\sqrt{5}k^2}{1-4k^2}\right)^2-4\times\frac{-20k^2-4}{1-4k^2}}\\
&=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{1+k^2}}{|1-4k^2|}\\
&=\frac{4(1+k^2)}{4k^2-1},
\end{aligned}
$$
…………………………（7 分）

用 $-\dfrac{1}{k}$ 替换 k 可得 $|BD|=\dfrac{4(k^2+1)}{4-k^2}$，…………………………（8 分）

所以 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4(1+k^2)}{4k^2-1}\cdot\dfrac{4(k^2+1)}{4-k^2}=8\cdot\dfrac{(k^2+1)^2}{(4k^2-1)(4-k^2)}$. …………………（9 分）

令 $t=k^2+1$，所以 $k^2=t-1$，$t\in\left(\dfrac{5}{4},5\right)$，

则 $S_{ABCD}=8\cdot\dfrac{t^2}{-4t^2+25t-25}=8\cdot\dfrac{1}{-4+\dfrac{25}{t}-\dfrac{25}{t^2}}=\dfrac{8}{-25\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}}\geqslant\dfrac{32}{9}$，…………………（11 分）

当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $k=\pm 1$ 时，等号成立，

故四边形 $ABCD$ 面积的最小值为$\frac{32}{9}$. …………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化以及直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）将 C 的参数方程化为普通方程：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，

即 C 是一个椭圆，C 上纵坐标最大的点为其上顶点$(0,1)$， …………………………（2 分）

因为 l 经过点$(0,1)$和 $M(1,0)$，所以 l 的斜率为 -1，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$， …………………（3 分）

故其参数方程可写为$\begin{cases}x=1+t\cos\frac{3\pi}{4},\\y=t\sin\frac{3\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数），即$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. ………………（4 分）

注：答案不唯一，其他合理答案例如$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）或$\begin{cases}x=1-t,\\y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（Ⅱ）直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

将其代入$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 中整理可得$(3-2\cos^2\alpha)t^2+2t\cos\alpha-2=0$， ……………………（6 分）

设 A,B 在 l 上对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\frac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-3}$，且 t_1,t_2 符号相反， ……………（7 分）

故$||MA|-|MB||=|t_1+t_2|=\left|\frac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-3}\right|=\frac{2}{5}$，…………………………………………（8 分）

解得 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法以及基本不等式.

解析 （Ⅰ）由 $f(x)<x$ 得$|x-1|+|x-2|<x$，

即$\begin{cases}x<1,\\3-2x<x,\end{cases}$或$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\1<x,\end{cases}$或$\begin{cases}x>2,\\2x-3<x,\end{cases}$

分别解得 $x\in\varnothing$或 $1<x\leqslant 2$ 或 $2<x<3$， ……………………………………………（3 分）

综上可得不等式 $f(x)<x$ 的解集为$(1,3)$. ……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意知 $f(x)=\begin{cases}3-2x,x<1,\\1,1\leqslant x\leqslant 2,\\2x-3,x>2,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的值域为$[1,+\infty)$. …………………（6 分）

因为 a,b 是正实数，所以 $a+1\geqslant 2\sqrt{a}$，$b+1\geqslant 2\sqrt{b}$，

所以 $a+b+2\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$， ……………………………………………………（8 分）

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2$，即$\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}\leqslant 1$， ……………………………（9 分）

因此对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}$恒成立，即该不等式解集为 $\mathbf{R}$. ………………（10 分）