2023年数学新高考2卷

一、单选题

1. 在复平面内，$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ 对应的点位于(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

答案:A

解析: $(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=6+8i$, 在复平面所对应的点为 $(6,8)$, 位于第一象限。故选 A.

2. 设集合 $A=\{0,-a\},B=\{1,a-2,2a-2\}$, 若 $A\subseteq B$, 则 $a=$(　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

答案:B

解析:因为 $A\subseteq B$

①当 $0=a-2$ 时，$a=2$, 可得 $A=\{0,-2\},B=\{1,0,2\}$, 不符合题意；

②当 $0=2a-2$ 时，$a=1$, 可得 $A=\{0,-1\},B=\{1,-1,0\},A\subseteq B$,故选 B

3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生，已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生，则不同抽样结果共有( ).

A. $C_{400}^{45}\cdot C_{200}^{15}$ 种　　B. $C_{400}^{20}\cdot C_{200}^{40}$ 种　　C. $C_{400}^{30}\cdot C_{200}^{30}$ 种　　D. $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种

答案:D

解析:用比例分配的分层随机抽样法，抽得的初中部和高中部的学生人数分别为 40 和 20，第一步在总数为 400 的初中部抽取 40 个学生共 C_{400}^{40} 种方法，第二步在总数为 200 的高中部抽取 20 个学生共 C_{200}^{20} 种方法，根据分步乘法原理，最终有 $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种抽取方法。故选 D.

4. 若 $f(x)=(x+a)\ \ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a=$(　　)

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. -1

答案:B

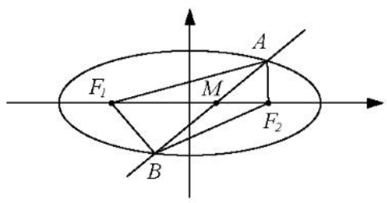
解析:有解析式可得 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$, 又 $f(x)$ 为偶函数，因此 $f(-1)=f(1)$, 即 $(1+a)ln\frac{1}{3}=(-1+a)ln3$, 解得 $a=0$. 故选 B.

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2, 直线 $y=x+m$ 与 C 交于点 A，B 两点，若 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 的 2 倍，则 $m=$(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

答案:C

解析:如图，



设直线与 x 轴交点为 M，因为 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 的 2 倍，可得 $F_1M=2MF_2$, 又椭圆中 $c^2=a^2-b^2=2$, 所以 $F_1F_2=2\sqrt{2}$, 可得 M 点坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{3},0)$, 代入直线 $y=x+m$ 中可得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

6. 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为(　　)

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

答案:C

解析:$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$,因为$f(x)$在区间$(1,2)$单调递增,所以$f'(x)$区间$(1,2)$上恒大于等于零,即$ae^x-\frac{1}{x}\geqslant 0$,即$a\geqslant\frac{1}{xe^x}$恒成立,令$g(x)=\frac{1}{xe^x}$,$g'(x)=-\frac{x+1}{x^2e^x}<0$,因此$g(x)$在区间$(1,2)$上单调递减,即$g_{max}(x)=g(1)=e^{-1}$,所以$a\geqslant e^{-1}$,即$a$的最小值为$e^{-1}$. 故选C.

7. 已知α为锐角,$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$,则$\sin\frac{\alpha}{2}=$( )

A . $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

答案:D

解析:因为$sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-cos\alpha)=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$,又$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$,所以$sin\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$,故选D.

8. 记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和,若$S_4=5,S_6=21S_2$,则$S_8=$( )

A. 120 B. 85 C. -85 D. -120

答案:C

二、多选题

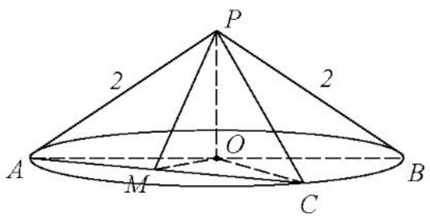
9. 已知圆锥的顶点为P,底面圆心为O,A,B为底面直径,$\angle APB=120^\circ$,$PA=2$,点C在底面圆周上,且二面角$P-AC-O$为45°,则( )

A. 该圆锥的体积为$4\sqrt{3}\pi$ B. 该圆锥的侧面积为$4\sqrt{3}\pi$

C. $AC=2\sqrt{2}$ D. $\triangle PAC$的面积为$\sqrt{3}$

答案:AC

解析:如图,



由题意可知$AB=2R=2\sqrt{3}$,$PO=1$,取AC中点M,连接PM,OM,OC,因为$PA=PB,OA=OC$,所以$PM\perp AC$,$OM\perp AC$,即$\angle PMO$为二面角$P-AC-O$的平面角为45°,因此$Rt\triangle POM$中,$OM=PO=1,PM=\sqrt{2}$.

对于A,圆锥的体积$V=\frac{1}{3}(\pi R^2)\cdot PO=\pi$,A正确;

对于B,圆锥的侧面积$S=\frac{1}{2}(2\pi R)\cdot PA=2\sqrt{3}\pi$,B错误;

对于C,根据圆的垂径定理,M为AC中点,$Rt\triangle OMC$中,$MC=\sqrt{OC^2-OM^2}=\sqrt{2}$,因此$AC=2\sqrt{2}$,C正确;

对于D,由勾股定理可得$PA\perp PC$,因此$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}PA\cdot PC=2$,D错误.

故选AC.

10. 设O为坐标原点,直线$y=-\sqrt{3}(x-1)$过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点,且与C交于M,N两点,l为C的准线,则( )

A. $p=2$ B. $|MN|=\frac{8}{3}$

C. 以MN为直径的圆与l相切 D. $\triangle OMN$为等腰三角形

答案:AC

解析:直线$y=-\sqrt{3}(x-1)$与x轴交点为$(1,0)$即为抛物线的焦点,因此$p=2$,A正确;因此抛物线C的方程为$y^2=4x$,联立$\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$,得$3x^2-10x+3=0$,可得$x_1=\frac{1}{3},x_2=3$,进而可得$M(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}),N(3,-2\sqrt{3})$(设$M$在第一象限,$N$在第四象限),所以$|MN|=\frac{16}{3}$,B错误;$|OM|=\frac{\sqrt{13}}{3}$,$|ON|=\sqrt{21}$,$\triangle OMN$不是等腰三角形,D错误;又$M,N$

中点的横坐标为 $\dfrac{\frac{1}{3}+3}{2}=\dfrac{5}{3}$, 此即以 MN 为直径的圆的圆心的横坐标，进而可得圆心到准线 l 的距离为 $\dfrac{5}{3}+\dfrac{p}{2}=\dfrac{8}{3}$ $=\dfrac{|MN|}{2}=r$, 因此以 MN 为直径的圆与 l 相切，C 正确。

故选 AC.

11. 若 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{b}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则 (　　)

A. $bc>0$　　　　B. $ab>0$　　　　C. $b^2+8ac>0$　　　　D. $ac<0$

答案:BCD

解析: $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2c}{x^3}=\dfrac{ax^2-bx-2c}{x^3}(x>0)$, 因为 $f(x)$ 既有极大值也有极小值，故 $y=ax^2-bx-2c$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，即 $\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}b^2+8ac>0\\\dfrac{b}{a}>0\\\dfrac{-2c}{a}>0\end{cases}$, 可知 a,b 同号，且它们与 c 异号，故选 C.

12. 在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立. 发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha\ (<\alpha<l)$，收到 0 的概率为 $1-\alpha$; 发送 1 时，收到 0 的概率为 $\beta(O<\beta<1)$，收到 1 的概率为 $1-\beta$. 考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次. 三次传输是指每个信号重复发送 3 次，收到的信号需要译码，译码规则如下: 单次传输时，收到的信号即为译码; 三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码(例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1).

A. 采用单次传输方案，若依次发送 1，0，1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送 1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当 $0<\alpha<0.5$ 时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

答案:ABD

三、填空题

13. 已知向量 a,b 满足 $|a-b|=\sqrt{3},|a+b|=|2a-b|$, 则 $|b|=$ ____________

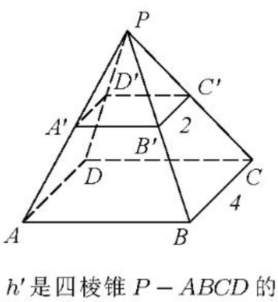
答案: $\sqrt{3}$

解析: 因为 $|a-b|=\sqrt{3}$, 所以 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3$ ①; 同样 $|a+b|=|2a-b|$, 所以 $\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$, 化简得 $\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$ 代入①可得 $\vec{b}^2=3$, 因此 $|b|=\sqrt{3}$.

14. 底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为__________ .

答案:28

解析: 如图，

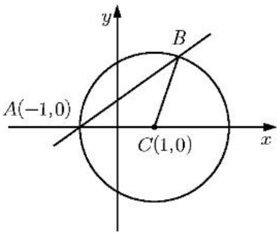


由位似知识可得四棱锥 $P-A'B'C'D'$ 的高 h' 是四棱锥 $P-ABCD$ 的高 h 的 $\dfrac{1}{2}$, 进而 $h=6$, 所以棱台的体积为 $V_{P-ABCD}-V_{P-A'B'C'D'}=\dfrac{1}{3}\times 4^2\times 6-\dfrac{1}{3}\times 2^2\times 3=28$.

15. 已知直线 $x-my+1=0$ 与 $\odot C$: $(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A, B 两点，写出满足"$\triangle ABC$ 面积为 $\dfrac{8}{5}$"的 m 的一个值 __________

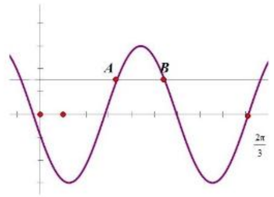
答案：$\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ 或 2 或 -2.

解析：如图，



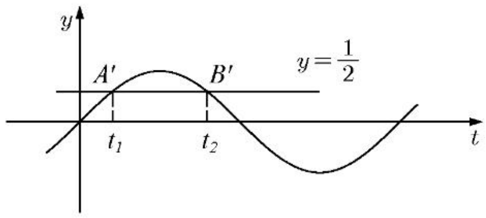
由题意可知，直线恒过点 $A(-1,0)$，此即圆和 x 轴负半轴得交点，C 到直线得距离 $d=\frac{|1-m\times 0+1|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}$，由垂径定理可得 $\frac{|AB|}{2}=\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\frac{m^2}{m^2+1}}$，因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{4|m|}{m^2+1}=\frac{8}{5}$，可得 $|m|=\frac{1}{2}$ 或 2.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图 A，B 是直线 $y=\frac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点，若 $|AB|=\frac{\pi}{6}$，则 $f(\pi)=$____ .



答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：此复合函数得内层函数为 $t=\omega x+\varphi$，外层函数为 $y=sint$，画出外层函数图象，



可知 $y=sint$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 交点 A' 与 B' 的最近距离 $|t_1-t_2|$ 为 $\frac{2}{3}\pi$，即 $|(\omega x_1+\varphi)-(\omega x_2+\varphi)|=|\omega(x_1-x_2)|=\frac{2}{3}\pi$，又 $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{6}$，所以 $\omega=4$，再将 $(\frac{2}{3}\pi,0)$ 代入解析式可得 $\varphi=-\frac{8}{3}\pi$，故 $f(x)=sin(4x-\frac{8}{3}\pi)$，

$f(\pi)=sin(4\pi-\frac{8}{3}\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

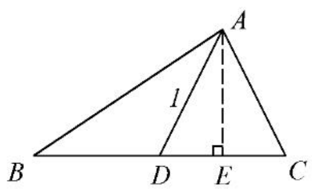
三、解答题

17. $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$D$ 为 BC 的中点，$AD=1$

(1) 若 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求 $\tan B$

(2) 若 $b^2+c^2=8$，求 b,c

解：(1)



$\because S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot sin\angle ADC=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

$\therefore DC=2, BD=2$
过 A 作 $AE\perp BC$ 交 BC 于 E
$\therefore DE=\frac{1}{2}, AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore BE=BD+DE=\frac{5}{2}$
$\therefore Rt\triangle ABE$ 中，$tanB=\frac{AE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{5}$
(2) $\because \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$
$\therefore 4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$
即 $4=c^2+b^2+2bccos\angle BAC$
又 $b^2+c^2=8$
$\therefore bccos\angle BAC=-2$ ①
又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bcsin\angle BAC=\sqrt{3}$
即 $bcsin\angle BAC=2\sqrt{3}$ ②
②÷①得：$tan\angle BAC=-\sqrt{3}$
又 $0<\angle BAC<\pi$
$\therefore \angle BAC=\frac{2}{3}\pi$ 代入②得 $bc=4$
与 $b^2+c^2=8$ 联立可得 $b=c=2$.

18. $\{a_n\}$ 为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n\text{ 为奇数}\\2a_n, n\text{ 为偶数}\end{cases}$，记 S_n，T_n 为 $\{a_n\}\{b_n\}$ 的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$

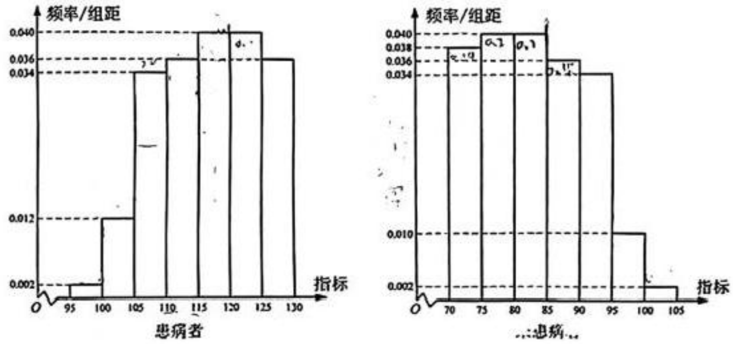
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
(2) 证明：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.
解：(1) $\because \{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d
又 $T_3=b_1+b_2+b_3=a_1-6+2a_2+a_3-6=16$
$\therefore a_1+d=7$
又 $S_4=4a_1+\frac{4\times3}{2}d=32$，即 $a_1+\frac{3}{2}d=8$
可得 $a_1=5, d=2$
$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$.
(2) 由 (1) 可得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2+4n$
当 n 为偶数时，
$$\begin{aligned}T_n&=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)\\&=(a_1-6+a_3-6+\cdots+a_{n-1}-6)+(2a_2+2a_4+\cdots+2a_n)\\&=(5+9+\cdots+2n+1-3n)+2(7+11+\cdots+2n+3)\\&=\frac{(5+2n+1)\cdot\frac{n}{2}}{2}-3n+2\times\frac{(7+2n+3)\cdot\frac{n}{2}}{2}\\&=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n\end{aligned}$$
当 $n>5$ 时
$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n-1)>0$
即 $T_n>S_n$.
当 n 为奇数时，$n-1$ 为偶数，
$$\begin{aligned}T_n&=T_{n-1}+b_n\\&=\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{7}{2}(n-1)+2n+3-6\\&=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5\end{aligned}$$
当 $n>5$ 时

$$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5-(n^2+4n)$$
$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n-5$$
$$=\frac{1}{2}(n^2-3n-10)$$
$$=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$$

即 $T_n>S_n$.

综上，即 $T_n>S_n$.

19. 某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性，此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(c)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(c)$. 假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1) 当漏诊率 $p(c)=0.5\%$ 时，求临界值 c 和误诊率 $q(c)$；

(2) 设函数 $f(c)=p(c)+q(c)$，当 $c\in[95,105]$ 时，求 $f(c)$ 的解析式，并求 $f(c)$ 在区间的最小值.

解：(1) 当漏诊率 $P(c)=0.5\%$ 时，即 $(c-95)\times0.002=0.005$，解得 $c=97.5$

此时，误诊率 $q(c)=(100-97.5)\times0.010+5\times0.002=0.035=3.5\%$.

因此，当漏诊率 $P(c)=0.5\%$ 时，临界值 $c=97.5$ 和误诊率 $q(c)=3.5\%$.

(2) 当 $95\leqslant c\leqslant100$ 时

$p(c)=(c-95)\cdot0.002=0.002c-0.19$,

$q(c)=(100-c)\cdot0.010+5\times0.002=-0.01c+1.01$

$\therefore f(c)=p(c)+q(c)=-0.008+0.82$

$\therefore f(c)$ 的最小值为 $f(100)=0.02$

当 $100\leqslant c\leqslant105$ 时，

$p(c)=5\times0.002+(c-100)\cdot0.012=0.012c-1.19$

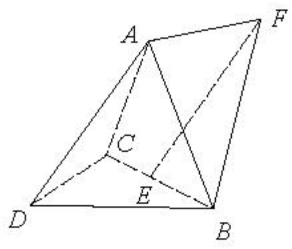
$q(c)=(105-c)\cdot0.002=-0.002c+0.21$

$f(c)=0.01c-0.98$

$\therefore f(c)$ 的最小值为 $f(100)=0.02$

综上，$f(c)$ 在区间的最小值为 0.02.

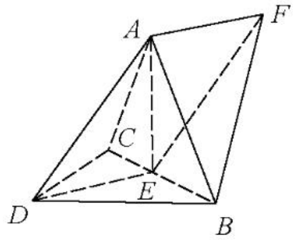
20. 三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$ 为 BC 中点



(1)证明 $BC\perp DA$

(2)点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.

解:(1)



连接 AE,DE

$\therefore DA=DB=DC,\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle ABD$

$\therefore AB=AC$

$\because E$ 为 BC 中点，$DB=DC$

$\therefore BC\perp DE,BC\perp AE$

又 $DE\cap AE=E$

$\therefore BC\perp$ 平面 ADE

$\therefore BC\perp DA$

(2)设 $DA=DB=DC=2$

由 $\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$ 可知 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$ 为等边三角形

$\therefore AB=AC=2$

又 $BD\perp CD$

$\therefore BC=2\sqrt{2}$

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle BAC=90^\circ$

$\therefore AE=\sqrt{2}$

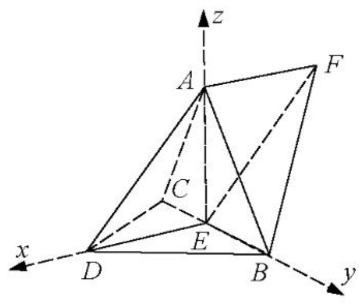
$\therefore AE^2+DE^2=AD^2$

$\therefore AE\perp DE$

又 $AE\perp BC,BC\cap DE=E$

$\therefore AE\perp$ 平面 BCD

分别以 ED,EB,EA 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图



则 $E(0,0,0),D(\sqrt{2},0,0),B(0,\sqrt{2},0),A(0,0,\sqrt{2})$

设 $F(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{EF}=(x,y,z)=\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$

$\therefore F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$

设平面 DAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，可得 $\vec{m}=(1,1,1)$

又 $\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})$

设平面 FAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，可得 $\vec{n}=(0,1,1)$

$\therefore cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$

所以，二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

21. 双曲线 C 中心为原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5},0)$，离心率为 $\sqrt{5}$

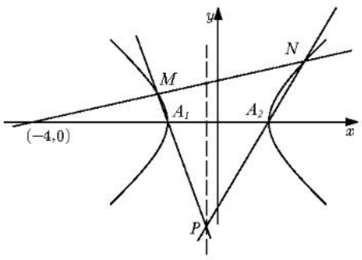
(1) 求 C 的方程；

(2) 记 C 的左，右顶点分别为 A_1，A_2，过点 $(-4,0)$ 的直线与 C 的左支交于 M,N 两点，M 在第二象限，直线 MA_1 与 NA_2 交于 P，证明 P 在定直线上.

解：(1) 由题意 $\begin{cases}c=2\sqrt{5}\\ e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，可得 $\begin{cases}a=2\\ b=4\\ c=2\sqrt{5}\end{cases}$

故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$

(2)



如图，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线 MN 方程为 $y=k(x+4)$

由 (1) $A_1(-2,0),A_2(2,0)$

$\therefore l_{MA_1}:y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2),l_{NA_2}:y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$

联立两直线

$\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$

$\dfrac{k(x_1+4)}{x_1+2}(x+2)=\dfrac{k(x_2+4)}{x_2-2}(x-2)$

$(x_1+4)(x_2-2)(x+2)=(x_2+4)(x_1+2)(x-2)$

解得 $x=2\cdot\dfrac{x_1x_2+x_1+3x_2}{3x_1-x_2+8}$ ①

联立 $\begin{cases}y=k(x+4)\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1\end{cases}$ 可得：$(4-k^2)x^2-8k^2x-16k^2-16=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4-k^2}\\ x_1x_2=-16\cdot\dfrac{k^2+1}{4-k^2}\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x_1x_2=-2\cdot\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2)\\ 8=(\dfrac{4}{k^2}-1)(x_1+x_2)\end{cases}$ 代入①

可得 $x=2\cdot\dfrac{-2\cdot\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2)+x_1+3x_2}{3x_1-x_2+(\dfrac{4}{k^2}-1)(x_1+x_2)}=-\dfrac{\left(\dfrac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\dfrac{2}{k^2}\right)x_2}{\left(\dfrac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\dfrac{2}{k^2}\right)x_2}=-1$

所以点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

22. (1) 证明:当 $0<x<1$ 时, $x-x^2<\sin x<x$;

(2) 已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$, 若 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

解: (1) 令 $g(x)=x-x^2-sinx$

$g'(x)=1-2x-cosx$,

$g''(x)=-2+sinx<0$, 可知 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减

$\therefore g'(x)<g'(0)=0$, 可知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减

$\therefore g(x)<g(0)=0$

$\therefore x-x^2<\sin x$

令 $h(x)=sinx-x$

$h'(x)=cosx-1\leqslant 0$, 可知 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减

$\therefore h(x)<h(0)=0$

$\therefore \sin x<x$

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时, $x-x^2<\sin x<x$.

(2) $f'(x)=-asinax+\dfrac{2x}{1-x^2}$

$f''(x)=-a^2cosax+\dfrac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$

$\because x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

$\therefore f''(0)<0$

$\therefore -a^2+2<0$

$\therefore a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。