试卷类型：A

高 三 数 学

2021.11

本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|1<x<5\}$，$B=\{x\in \mathrm{N}|-1<x\leq 3\}$，则 $A\cap B=$

A. $(1,3]$　　B. $(-1,5)$

C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

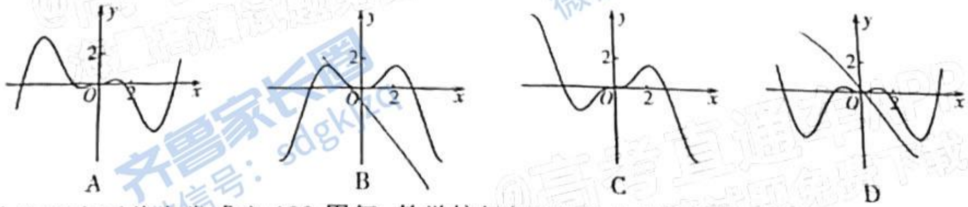
2. 我们称可同时存在于一个指数函数与一个对数函数的图象上的点为“和谐点”，则四个点 $M(1,1)$，$N(2,1)$，$P(2,2)$，$Q(2,-3)$ 中“和谐点”的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知 $\sin 2\alpha=-\frac{1}{4}$，则 $\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})=$

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\frac{5}{8}$

4. 函数 $f(x)=\frac{x^3\cos x}{x^2+1}$ 的图象大致为



5. 为庆祝中国共产党成立100周年，某学校组织“红心向党”歌咏比赛，前三名被甲、乙、丙获得. 下面三个结论：“甲为第一名，乙不是第一名，丙不是第三名”中只有一个正确，由此可推得获得第一、二、三名的依次是

A. 甲、乙、丙　　B. 乙、丙、甲　　C. 丙、甲、乙　　D. 乙、甲、丙

6. 若函数 $f(x)=(x^2+ax+2)\cdot e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值，则实数 a 的取值范围是

A. $(-2,2)$　　B. $(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$

C. $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　D. $[-2,2]$

7. 已知 $x>0,y>0,x+2y=1$，则 $\frac{(x+1)(y+1)}{xy}$ 的最小值为

A. $4+4\sqrt{3}$　　B. 12　　C. $8+4\sqrt{3}$　　D. 16

8. "迪拜世博会"于 2021 年 10 月 1 日至 2022 年 3 月 31 日在迪拜举行，中国馆建筑名为"华夏之光"，外观取型中国传统灯笼，寓意希望和光明. 它的形状可视为内外两个同轴圆柱，某爱好者制作了一个中国馆的实心模型，已知模型内层底面直径为 12cm，外层底面直径为 16cm，且内外层圆柱的底面圆周都在一个直径为 20cm 的球面上. 此模型的体积为

A. $304\pi cm^3$　　B. $840\pi cm^3$　　C. $912\pi cm^3$　　D. $984\pi cm^3$

二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某位同学 10 次考试的物理成绩 y 与数学成绩 x 如下表所示：

数学成绩 x	76	82	72	87	93	78	89	66	81	76
物理成绩 y	80	87	75	a	100	79	93	68	85	77

参考数据：$\sum_{i=1}^{10} x_i = 800$.

已知 y 与 x 线性相关，且 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y} = 1.1x - 5$，则下列说法正确的是

A. $a = 86$

B. y 与 x 正相关

C. y 与 x 的相关系数为负数

D. 若数学成绩每提高 5 分，则物理成绩估计能提高 5.5 分

10. 下列四个函数中，以 π 为周期且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增的偶函数有

A. $y = \cos|2x|$　　B. $y = |\tan x|$　　C. $y = \sin|x|$　　D. $y = \lg|\sin x|$

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，下列结论正确的有

A. 异面直线 CA_1 与 B_1D_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

B. 若 E 是直线 AC 上的动点，则 D_1E // 平面 A_1BC_1

C. 与此正方体的每个面都有公共点的截面的面积最小值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 若此正方体的每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截正方体所得截面面积的最大值是 $\sqrt{3}$

12. 下列结论正确的有

A. 若 $a = \sin\frac{1}{2}$，$b = -\log_2 \sin\frac{1}{2}$，$c = 2^{-\sin\frac{1}{2}}$，则 $b > c > a$

B. 若 $a > 0$，$a^a = (9a)^{6a}$，则 $\log_a 3a = \frac{5}{12}$

C. 若 $xy \neq 0$，$2^x = 18^y = 9^{xy}$，则 $x - y = 1$

D. 若 a, b, c, d 均为正整数，$\log_a b = \frac{3}{2}$，$\log_c d = \frac{5}{4}$，$a - c = 9$，则 $b + d = 157$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

13. 已知 $X\sim B(3,\frac{3}{5})$，且 $Y=-5X+2$，则 Y 的方差为______.

14. 为迎接2022年北京冬奥会，将6名志愿者分配到花样滑冰、速度滑冰2个项目进行培训，每名志愿者分配到1个项目，每个项目至少分配到1名志愿者，则不同的分配方案共有______种.（用数字作答）

15. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}, & x\leqslant 1\\ -f(x-2), & x>1\end{cases}$，则 $f(2022)=$______.

16. 学生小雨欲制作一个有盖的圆柱形容器，满足以下三个条件：①可将八个半径为20mm的乒乓球分两层放置在里面；②每个乒乓球都和其相邻的四个球相切；③每个乒乓球与该容器的底面（或上盖）及侧面都相切，则该容器的高为______mm.

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17.（10分）

已知函数 $f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}$（k 为常数，$k\in\mathbf{R}$）是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

（1）求实数 k 的值；

（2）若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,m]$ 上的值域为 $[n,\frac{15}{4}]$，求 $m+n$ 的值.

18.（12分）

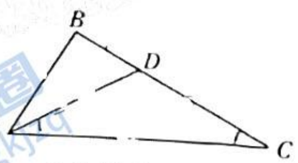
已知命题 p："$\forall m\in\mathbf{R}$，关于 x 的方程 $x^2+mx+m+3=0$ 有两个不相等的负实根"是假命题.

（1）求实数 m 的取值集合 M；

（2）在（1）的条件下，设不等式 $(x-a)(x-2)<0$ 的解集为 N，其中 $a\neq 2$. 若 $x\in N$ 是 $x\in M$ 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

19.（12分）

在① $a\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}b$；② $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$；③ $bc=b^2+c^2-a^2$ 这三个条件中任选一个补充在下面横线上，并解决该问题.



问题：在 $\triangle ABC$ 中，它的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，A 为锐角，$b+c=6$，______.

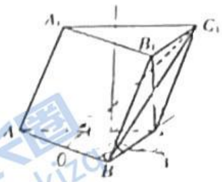
（1）求 a 的最小值；

（2）若 D 为 BC 上一点，且满足 $AD=CD=2BD$，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 B_1 在底面 ABC 内的射影恰好是点 C，D 是 AC 的中点，且满足 $DA=DB$.

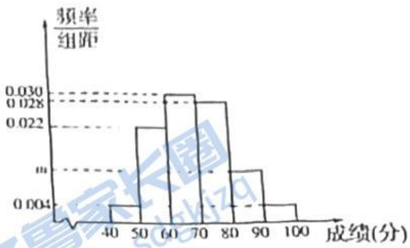


（1）求证：$AB\perp$ 平面 BCC_1B_1；

（2）已知 $AC=2BC=2$，直线 BB_1 与底面 ABC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，求二面角 $C-BD-C_1$ 的大小.

21.（12 分）

2021 年 7 月 18 日第 30 届全国中学生生物学竞赛在浙江省萧山中学隆重举行. 为做好本次考试的评价工作，将本次成绩转化为百分制，现从中随机抽取了 50 名学生的成绩，经统计，这批学生的成绩全部介于 40 至 100 之间，将数据按照 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 分成 6 组，制成了如图所示的频率分布直方图.



（1）求频率分布直方图中 m 的值，并估计这 50 名学生成绩的中位数；

（2）在这 50 名学生中用分层抽样的方法从成绩在 $[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 的三组中抽取了 11 人，再从这 11 人中随机抽取 3 人，记 ξ 为 3 人中成绩在 $[80,90)$ 的人数，求 ξ 的分布列和数学期望；

（3）转化为百分制后，规定成绩在 $[90,100]$ 的为 A 等级，成绩在 $[70,90)$ 的为 B 等级，其它为 C 等级. 以样本估计总体，用频率代替概率，从所有参加生物学竞赛的同学中随机抽取 100 人，其中获得 B 等级的人数设为 η，记 B 等级的人数为 k 的概率为 $P(\eta=k)$，写出 $P(\eta=k)$ 的表达式，并求出当 k 为何值时，$P(\eta=k)$ 最大？

22.（12 分）

已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$，$g(x)=e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）过原点分别作曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的切线 l_1 和 l_2，求证：存在 $a>0$，使得切线 l_1 和 l_2 的斜率互为倒数；

（3）若函数 $h(x)=x^2+a-f(x)$ 的图象与 x 轴交于两点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，且 $0<x_1<x_2$. 设 $x_0=\lambda x_1+\mu x_2$，其中常数 λ、μ 满足条件 $\lambda+\mu=1$，$\mu\geq\lambda>0$，试判断函数 $h(x)$ 在点 $M(x_0,h(x_0))$ 处的切线斜率的正负，并说明理由.

高三数学参考答案及评分标准

2021.11

一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1－4 CABA 5－8 BDCC

二、多项选择题(每小题5分,共20分)

9. ABD 10. BD 11. BC 12. ACD

三、填空题(每小题5分,共20分)

13. 18 14. 14 15. $-\frac{1}{2}$ 16. $40+20\sqrt[4]{8}$

四、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解:(1)因为函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数,所以$f(-x)=-f(x)$,

即$2^{-x}+k\cdot 2^{-(-x)}=-2^{x}-k\cdot 2^{-x}$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立, ……… 2分

整理得$(k+1)(2^{x}+2^{-x})=0$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立,

即$k+1=0$,解得$k=-1$. ……… 5分

(2)由$f(x)=2^{x}-2^{-x}$,可知$f(x)$是$[1,m]$上的增函数, ……… 6分

所以$f(x)_{\min}=f(1)=2^{1}-2^{-1}=\frac{3}{2}=n$, ……… 7分

$f(x)_{\max}=f(m)=2^{m}-2^{-m}=\frac{15}{4}$,解得$m=2$, ……… 9分

故$m+n=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$. ……… 10分

18. 解:(1)方程$x^{2}+mx+m+3=0$有两个不相等的负实根时,则$\begin{cases}\Delta=m^{2}-4m-12>0\\x_1+x_2=-m<0\\x_1\cdot x_2=m+3>0\end{cases}$,

解得$m>6$, ……… 4分

因为p是假命题,所以集合$M=\{m|m\leqslant 6\}$. ……… 6分

(2)因为$x\in N$是$x\in M$的充分条件,所以$N\subseteq M$, ……… 7分

①当$a>2$时,集合$N=\{x|2<x<a\}$,因为$N\subseteq M$,所以$a\leqslant 6$. 所以$2<a\leqslant 6$. …… 9分

②当$a<2$时,集合$N=\{x|a<x<2\}$,此时$N\subseteq M$恒成立.

所以$a<2$时符合题意. ……… 11分

综上,a的取值范围是$\{a|a\leqslant 6$且$a\neq 2\}$. ……… 12分

19. 解：选①：

由正弦定理得 $\sin A\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B$，

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …………………………………… 2 分

因为 A 为锐角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 3 分

选②：

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …………………………………… 2 分

因为 A 为锐角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 3 分

选③：

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$， …………………………………… 2 分

因为 A 为锐角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 3 分

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=(b+c)^2-3bc=36-3bc$，

因为 $bc\leqslant(\frac{b+c}{2})^2=9$，当且仅当 $b=c=3$ 时取得等号， …………………………………… 5 分

所以 $36-3bc\geqslant36-27$，即 $a^2\geqslant9$，解得 $a\geqslant3$，

所以 a 的最小值为 3. …………………………………… 6 分

(2) 由题意，设 $\angle ACD=\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，因为 $AD=CD$，所以 $\angle CAD=\theta$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}-\theta$，$B=\frac{2}{3}\pi-\theta$，

由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{AD}{\sin(\frac{2}{3}\pi-\theta)}$，因为 $AD=2BD$， …………………………………… 8 分

所以 $2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=\sin(\frac{2}{3}\pi-\theta)$，即 $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$，

所以 $\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=0$，即 $\sqrt{3}\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=0$， …………………………………… 10 分

又 $-\frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}$，所以 $\theta-\frac{\pi}{6}=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形. …………………………………… 12 分

20. 证明：(1)因为点 B_1 在底面 ABC 内的射影恰好是点 C，

所以 $B_1C\perp$ 底面 ABC，

又因为 $AB\subset$ 底面 ABC，

所以 $B_1C\perp AB$. …………………………………………………… 2 分

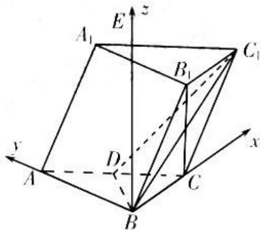
在 $\triangle ABC$ 中，因为 D 是 AC 的中点且 $DA=DB$，

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形，即 $AB\perp BC$，

因为 $B_1C\cap BC=C$，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1. …………………………………………………… 4 分

(2)因为 $B_1C\perp$ 底面 ABC，且直线 BB_1 与底面 ABC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle B_1BC=\frac{\pi}{3}$，所以 $B_1C=\sqrt{3}$. ………… 5 分



过点 B 作平面 ABC 的垂线 BE，以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $B(0,0,0)$，$D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$C(1,0,0)$，$B_1(1,0,\sqrt{3})$，$C_1(2,0,\sqrt{3})$. ……………… 7 分

所以 $\overrightarrow{BD}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(2,0,\sqrt{3})$.

设平面 BDC_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=2x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$$

令 $z=-2$，解得 $x=\sqrt{3}$，$y=-1$，此时 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,-2)$. ………………………… 9 分

显然 $\overrightarrow{CB_1}$ 是平面 BCD 的一个法向量，$\overrightarrow{CB_1}=(0,0,\sqrt{3})$. ……………………………… 10 分

因为 $\cos<\overrightarrow{CB_1},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{CB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CB_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………… 11 分

由图可知二面角 $C-BD-C_1$ 是锐角，

因此二面角 $C-BD-C_1$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由 $(0.004+0.022+0.030+0.028+m+0.004)\times10=1$，解得 $m=0.012$， …
…………………………………………………………………………… 1 分

因为前两组的频率之和为 $0.04+0.22=0.26<0.50$，

前三组的频率之和为 $0.04+0.22+0.30=0.56>0.50$，

设中位数为 x_0，则 $x_0\in[60,70)$，所以 $0.26+(x_0-60)\times0.030=0.50$，解得 $x_0=68$(分).
…………………………………………………………………………… 3 分

(2)因为50人中成绩在[70，80)共有$0.28\times50=14$人，成绩在[80，90)共有$0.12\times50=6$人，成绩在[90，100]共有$0.04\times50=2$人，所以[70，80)抽取了7人，[80，90)抽取了3人，[90，100]抽取了1人，

ξ的所有可能取值为0，1，2，3，

$P(\xi=0)=\frac{C_8^3C_3^0}{C_{11}^3}=\frac{56}{165}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_8^2C_3^1}{C_{11}^3}=\frac{84}{165}=\frac{28}{55}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_8^1C_3^2}{C_{11}^3}=\frac{24}{165}=\frac{8}{55}$，

$P(\xi=3)=\frac{C_8^0C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{1}{165}$，

所以ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{56}{165}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{1}{165}$

…………………………………… 7分

数学期望$E(\xi)=0\times\frac{56}{165}+1\times\frac{28}{55}+2\times\frac{8}{55}+3\times\frac{1}{165}=\frac{135}{165}=\frac{9}{11}$.

另解：因为$\xi\sim H(11,3,3)$，所以$E(\xi)=n\frac{M}{N}=3\times\frac{3}{11}=\frac{9}{11}$. ………………………… 8分

(3)[70,90)的频率为$0.28+0.12=0.4$，由题意知$\eta\sim B(100,0.4)$，…………… 9分

所以$P(\eta=k)=C_{100}^k\times0.4^k\times0.6^{100-k}(0\leqslant k\leqslant100,k\in\mathbf{N})$. ……………………… 10分

法一：作商法

$\frac{P(\eta=k+1)}{P(\eta=k)}=\frac{C_{100}^{k+1}\times0.4^{k+1}\times0.6^{99-k}}{C_{100}^k\times0.4^k\times0.6^{100-k}}=\frac{100-k}{k+1}\times\frac{2}{3}>1$，解得$k<39.4$.

法二：作差法

$P(\eta=k+1)-P(\eta=k)=C_{100}^{k+1}\times0.4^{k+1}\times0.6^{99-k}-C_{100}^k\times0.4^k\times0.6^{100-k}$

$=\frac{100\times99\times\cdots\times(101-k)\times0.4^k\times0.6^{99-k}}{(k+1)!}\times(39.4-k)>0$，

解得$k<39.4$，

所以，当$k\leqslant39$时，

$P(\eta=k+1)>P(\eta=k)$即$P(\eta=40)>P(\eta=39)>\cdots>P(\eta=0)$，

当$k\geqslant40$时，

$P(\eta=k+1)<P(\eta=k)$即$P(\eta=40)>P(\eta=41)>\cdots>P(\eta=100)$，………… 11分

所以$P(\eta=k)_{\max}=P(\eta=40)$，即当$k=40$时，$P(\eta=k)$最大. …………………… 12分

22. 解：(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-a(x>0)$，

若$a\leqslant 0$，则$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，无单调递减区间；…… 1 分

若$a>0$，则当$x\in(0,\frac{1}{a})$时，$f'(x)>0$；当$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$.

此时函数在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减. …………………… 2 分

(2)证明：设切线l_2的方程为$y=k_2x$，切点为(x_2,e^{x_2})，$g'(x)=e^x$，

故$e^{x_2}=\frac{e^{x_2}}{x_2}$，所以$x_2=1$，$k_2=e$.

则结合题意知切线l_1的斜率$k_1=\frac{1}{k_2}=\frac{1}{e}$，切线$l_1$的方程为$y=\frac{1}{e}x$，

设切线l_1与曲线$y=f(x)$的切点为(x_1,y_1)，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

所以$\frac{1}{x_1}-a=\frac{1}{e}$. ① …………………………………………………… 3 分

又因为$f(x_1)=\frac{1}{e}x_1$，即$\ln x_1+a(1-x_1)=\frac{1}{e}x_1$， ② …………………… 4 分

由①②消去x_1得：$e^{a-1}-a-\frac{1}{e}=0$， …………………………………… 5 分

令$\varphi(x)=e^{x-1}-x-\frac{1}{e}$，则$\varphi'(x)=e^{x-1}-1$.

当$x\in(0,1)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

又因为$\varphi(1)=-\frac{1}{e}<0$，$\varphi(2)=e-2-\frac{1}{e}>0$，

故存在$a_0\in(1,2)$使得$\varphi(a_0)=0$， …………………………………… 6 分

将$a=a_0$代入①式解得$x_1=\frac{e}{ea_0+1}>0$，

故存在$a=a_0>0$，使得切线l_1和l_2的斜率互为倒数. …………………… 7 分

(3)$h(x)=ax-\ln x+x^2$，$h'(x)=a-\frac{1}{x}+2x$，

由题意知$\begin{cases}ax_1-\ln x_1+x_1^2=0\\ax_2-\ln x_2+x_2^2=0\end{cases}$，两式相减得：$a(x_1-x_2)-(\ln x_1-\ln x_2)+(x_1^2-x_2^2)=0$，

所以$a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-(x_1+x_2)$. …………………………………… 8 分

又因为$\mu\geqslant\lambda>0$，$\mu+\lambda=1$，所以$\mu=1-\lambda$，$0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$.

所以 $h'(x_0)=h'(\lambda x_1+\mu x_2)=a-\dfrac{1}{\lambda x_1+\mu x_2}+2(\lambda x_1+\mu x_2)$

$=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}+(2\lambda-1)(x_1-x_2)-\dfrac{1}{\lambda x_1+\mu x_2}$, ………………………… 9 分

易知其中 $(2\lambda-1)(x_1-x_2)\geqslant 0$,

所以只需研究: $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{1}{\lambda x_1+\mu x_2}$ 的正负, 可先判断 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_1-x_2}{\lambda x_1+\mu x_2}$ 的正负.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$, $t\in(0,1)$, $\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_1-x_2}{\lambda x_1+\mu x_2}=\ln t-\dfrac{t-1}{\lambda t+\mu}$. ………………………… 10 分

设 $H(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{\lambda t+\mu}$, $t\in(0,1)$,

$H'(t)=\dfrac{\lambda^2t^2+(2\lambda\mu-1)t+\mu^2}{t(\lambda t+\mu)^2}=\dfrac{(t-1)(\lambda^2t-\mu^2)}{t(\lambda t+\mu)^2}$.

因为 $\mu\geqslant\lambda>0$, $0<t<1$, 所以 $t-1<0$, $\lambda^2t-\mu^2<0$,

所以 $H'(t)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

$H(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, $H(t)<H(1)=0$, ………………………… 11 分

即 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_1-x_2}{\lambda x_1+\mu x_2}<0$.

因为 $x_1-x_2<0$, 所以 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{1}{\lambda x_1+\mu x_2}>0$,

结合 $(2\lambda-1)(x_1-x_2)\geqslant 0$,

可知 $h'(x_0)>0$, 即在点 $M(x_0,h(x_0))$ 处的切线斜率为正. ………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索