

2016 年第 57 届国际数学奥林匹克竞赛 (IMO) 真题汇总

为方便考生深入了解国际数学奥林匹克竞赛，自主招生在线团队搜集整理 2016 年第 57 届国际数学奥林匹克竞赛真题，一起来看看世界顶级中学生数学竞赛题目的真面目吧。

第一日试题

Problem1

在直角三角形 BCF 中，点 A 在直线 CF 上且 $FA=FB$ ，并且 F 在 A,C 之间，点 D 使得 $DA=DC$ 并且 AC 是 $\angle BAD$ 的角平分线，点 E 使得 $EA=ED$ 且 AD 是 $\angle EAC$ 的角平分线，M 是 FC 中点，X 使得 AMXE 是平行四边形，证明：ME,FX,BD 三线共点。

Problem2

求所有的正整数 n 使得能够将一个 $n \times n$ 方形表格填满 I,M,O 三个字母，并且满足如下条件：

- ◆每行、每列恰好有：三分之一的 I,三分之一的 M,三分之一的 O。
- ◆若某条对角线上的方格数是 3 的倍数，则这条对角线上也恰好有三分之一的 I,三分之一的 M,三分之一的 O。

Note:将第 i 行第 j 列的表格记为 (i, j) ，这里的“对角线”一共有两类 $4n-2$ 条，第一类每条对角线指所有使得 $i+j$ 为常数的小方格 (i, j) 的集合，第二类是指所有使得 $i-j$ 为常数的小方格 (i, j) 的集合。

Problem3

有 $P=A_1 A_2 \dots A_k$ 是一个平面直角坐标系中的凸多边形，已知 P 内接于圆且 $A_1 A_2 \dots A_k$ 纵横坐标均为整数.P 的面积为 S，正奇数 n 满足 P 每条边长度的平方均被 n 整除，证明： $2S$ 是一个被 n 整除的整数。

第二日试题

Problem4

一个由正整数构成的集合称为"芳香集"，若它至少有两个元素，且其中每个元素都与其他元素中的至少一个元素有公共的素因子，设 $P(n)=n^2+n+1$ ，问：正整数 b 最小为何值时能够存在一个非负整数 a 使得集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

是一个"芳香集"

Problem5

黑板上写有方程：

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016)=(x-1)(x-2)\dots(x-2016)$$

其中等号两边各有 2016 个一次因式，试问：正整数 k 最小为何值时，可以在等号两边擦去 4032 个一次因式中的恰好 k 个，使得等号每一边都至少留下一个一次因式，且所得到的方程没有实数根？

Problem6

在平面上有 $n \geq 2$ 条线段，其中任意两条线段都交叉，且没有第三条线段相交于同一点，Geoff 在每条线段上选取一个端点并放置一只青蛙在此端点上，青蛙面向另一个端点，接着 Geoff 会拍 $n-1$ 次手，每当他拍一次手，每只青蛙都立即跳到它所在的线段的下一个交点，每只青蛙均不会改变跳跃的方向，Geoff 的愿望是能够适当地放置青蛙，使得在任何时候都不会有两只青蛙落在同一个交点上：

(a)证明：若 n 是奇数，则 Geoff 总能实现他的愿望。

(b)证明：若 n 是偶数，则 Geoff 不可能实现他的愿望