绝密★启用前

高一数学参考答案

1.【答案】B

【解析】因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=\frac{1}{2}bc=2$，所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

2.【答案】D

【解析】因为 $z\cdot\mathrm{i}+\bar{z}=a\mathrm{i}-b+a-b\mathrm{i}=(a-b)+(a-b)\mathrm{i}=0$，所以 $a=b$，

又 $a>0$，所以 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}a=3$，解得 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3.【答案】A

【解析】设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=x+2y=3\sqrt{2}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2x+y=0\end{cases}$，解得 $x=-\sqrt{2},y=2\sqrt{2}$，

所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$.

4.【答案】B

【解析】易知该堆沙子的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot3^2\cdot1=3\pi(\mathrm{m}^3)$，设圆柱形容器的高为 $h\mathrm{m}$，

若要尽可能多的盛放沙子，则超出该无盖容器上方的沙堆应形成一个圆锥，

母线与底面的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，即圆锥的高为 $1\mathrm{m}$，

所以该容器所能盛放沙子的最大体积 $V_0=\pi(\sqrt{3})^2\cdot h+\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3})^2\cdot1=3h\pi+\pi(\mathrm{m}^3)$，

则 $3h\pi+\pi\geqslant3\pi$，解得 $h\geqslant\frac{2}{3}$.

5.【答案】C

【解析】易知 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，

即 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=8+6+\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=10$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-3$.

6.【答案】A

【解析】在三棱锥 $A-BCD$ 中作 AC 的中点 H，连接 BH,DH，易知 $AC\perp BH,AC\perp DH$，

所以 $AC\perp$ 平面 BDH，

因为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 的面积为定值，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的面积相等，

所以当$\triangle ABC$的面积最大时，该三棱锥的表面积最大，此时$AB\perp BC$，则$AC=2\sqrt{2}$

此时$BH=DH=\sqrt{2}$，所以$BH^2+DH^2=BD^2$，即$BH\perp DH$，

所以$V_{A-BCD}=V_{A-BDH}+V_{C-BDH}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BDH}\times AC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7.【答案】D

【解析】$x^2-2x+3=0$的两个复数根为$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12-4\mathrm{i}}}{2}=1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$，

在复平面内对应的点分别为$A\left(1,\sqrt{2}\right),B\left(1,-\sqrt{2}\right)$，则$|AB|=2\sqrt{2}$，

对于方程$x^2-4x+a=0$，由题意可知，$\Delta=16-4a<0$，即$a>4$，解得$x_{3,4}=2\pm\sqrt{a-4}\mathrm{i}$，

在复平面内对应的点分别为$C\left(2,\sqrt{a-4}\right),D\left(2,-\sqrt{a-4}\right)$，则$|CD|=2\sqrt{a-4}$，

此时$S_{ACBD}=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)=\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{a-4}+2\sqrt{2}\right)=4$，解得$a=22-8\sqrt{2}$.

8.【答案】C

【解析】因为$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{3}}{a}$，所以$a=\frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$，

由余弦定理可知，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-\frac{3(bc)^2}{(b+c)^2}}{2bc}=\frac{(b+c)^2-\frac{3(bc)^2}{(b+c)^2}-2bc}{2bc}$，

所以$\cos A=\frac{(b+c)^2-\frac{3(bc)^2}{(b+c)^2}-2bc}{2bc}=\frac{(b+c)^2}{2bc}-\frac{3bc}{2(b+c)^2}-1$，

又因为$(b+c)^2\geqslant 4bc$，所以$\frac{(b+c)^2}{2bc}\geqslant 2$，当且仅当$b=c$时，等号成立，

所以$\cos A=\frac{(b+c)^2}{2bc}-\frac{3bc}{2(b+c)^2}-1\geqslant 2-\frac{3}{8}-1=\frac{5}{8}$.

9.【答案】【答案】ABC

【解析】因为$l// AB$，且$AB\subset$平面$ABCD$，$l\not\subset$平面$ABCD$，所以$l//$平面$ABCD$，即A正确；

因为AD与BC是等腰梯形的腰，二者交于一点，故若$l// AD$，则l与AD共面，

由异面直线定义可知，l与BC为异面直线，即B正确；

因为直线AD与BC相交，所以若$l\perp AD,l\perp BC$，则$l\perp$平面$ABCD$，即C正确；

作 $DE\perp AB$ 交直线 AB 于 E，当 $l\,//\,DE$ 时，$l\perp AB,l\perp CD$，但 l 不与 AD 垂直，故 D 错误.

10.【答案】ABD

【解析】因为 $A+B<C$，所以 $A<C,B<C$，所以 $a<c,b<c$，所以 $a+b<2c$，即 A 正确；

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $A+B<\dfrac{\pi}{2}<C$，所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，

所以 $a^2+b^2<c^2$，即 B 正确；

由 B 项可知，$c^2>a^2+b^2\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{2}$，所以 $a+b<\sqrt{2}c$，

所以 $\sin A+\sin B<\sqrt{2}\sin C$，即 C 错误；

因为 $A+B<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A<\dfrac{\pi}{2}-B$，所以 $\tan A<\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\dfrac{1}{\tan B}$，

所以 $\tan A\tan B<1$，即 D 正确.

11.【答案】BC

【解析】因为 $z_3=\overline{z_1\cdot z_2}$，所以 $z_3\cdot z_1\cdot z_2=|z_3|^2>0$，即 A 错误；

易知 $|z_3|=|\overline{z_1\cdot z_2}|=|\overline{z_1}|\cdot|\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|z_2|$，即 B 正确；

因为 $z_3\cdot z_1\cdot z_2=|z_3|^2$，所以 $\dfrac{1}{z_3}=\dfrac{z_1\cdot z_2}{|z_3|^2}$，且 $\dfrac{1}{z_1\cdot z_2}=\dfrac{z_3}{|z_3|^2}=\dfrac{\overline{z_1\cdot z_2}}{|z_3|^2}$，

所以 $\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{z_1\cdot z_2}{|z_3|^2}-\dfrac{\overline{z_1\cdot z_2}}{|z_3|^2}$ 是纯虚数，即 C 正确；

因为 $z_1\cdot z_2$ 为虚数，且 $z_1\cdot z_2\cdot z_3$ 为实数，

因为实系数二次方程的两个根必然同为实数或同为虚数，

所以不存在符合题意的实系数二次方程，即 D 错误.

12.【答案】ACD

【解析】因为 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AEF}$，所以 $AB\cdot AC=2AE\cdot AF$，

又 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=y\overrightarrow{AC}\left(x,y\in(0,1]\right)$，所以 $AB\cdot AC=2xAB\cdot yAC$，

所以 $2xy=1$，即 A 正确；

因为$x,y\in(0,1]$，且$xy=\dfrac{1}{2}$，所以$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，所以$x+y=x+\dfrac{1}{2x}\in\left[\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\right]$，即 B 错误；

易知$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD}=\dfrac{\lambda}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{\overrightarrow{AE}}{x}+\dfrac{\overrightarrow{AF}}{y}\right)=\dfrac{\lambda}{2x}\overrightarrow{AE}+\dfrac{\lambda}{2y}\overrightarrow{AF}$，

因为E,F,G共线，所以$\dfrac{\lambda}{2x}+\dfrac{\lambda}{2y}=1$，所以$\lambda=\dfrac{2xy}{x+y}=\dfrac{1}{x+y}\in\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，即 C 正确；

由 C 可知，$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD}=\dfrac{\lambda}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2(x+y)}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

易知$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=y\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2(x+y)}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(y\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{y\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-x\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+(y-x)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{2(x+y)}$，

因为$A=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=2,AC=6$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{36y-4x+6(y-x)}{2(x+y)}=\dfrac{21y-5x}{x+y}=\dfrac{21-10x^2}{2x^2+1}=\dfrac{26}{2x^2+1}-5$，

因为$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{26}{2x^2+1}-5\in\left[\dfrac{11}{3},\dfrac{37}{3}\right]$，即 D 正确.

13.【答案】$\sqrt{2}$

【解析】因为$z+\dfrac{2}{z}=2$，所以$z^2-2z+2=0$，解得$z_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4}\mathrm{i}}{2}=1\pm\mathrm{i}$，

所以$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

14.【答案】$\sqrt{21}$

【解析】易知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta+1=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，

所以当$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$最大时，$\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，此时$\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{3},2\right)$，

所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(2\sqrt{3},3\right)$，即$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+9}=\sqrt{21}$.

15.【答案】$\left(2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$

【解析】因为$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{c^2+2c+4-4}{2bc}>0$，所以$A$为锐角，

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0$，即$a^2+c^2>b^2$，

所以$4+c^2>2c+4$，解得$c>2$，

同理有$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，即$a^2+b^2>c^2$，

所以$2c+8>c^2$，解得$c<4$，

所以$2<c<4$，所以$b^2=2c+4\in(8,12)$，即$b\in\left(2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$.

16.【答案】$2\sqrt{3}\pi$

【解析】设截面ABC的圆心为M，因为$AB\perp AC$，所以M为BC的中点，

因为二面角$P-BC-A$的大小为$\dfrac{\pi}{4}$，

所以点P的轨迹在截面ABC两侧的两部分组成一个圆，

设这个圆的圆心为N，球心为O，

因为$AB=AC=2$，所以$MB=\sqrt{2}$，结合球半径$R=2$，可知$OM=\sqrt{2}$，

易知截面圆N与平面OBC所成锐二面角为$\dfrac{\pi}{4}$，所以$ON=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OM=1$，

所以P轨迹所在截面的圆的半径$r=\sqrt{R^2-1}=\sqrt{3}$，

所以P轨迹长度为$2\sqrt{3}\pi$.

17.【解析】（1）设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则$z\cdot\mathrm{i}+\bar{z}\cdot(1+\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}+(a-b\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})=a+(2a-b)\mathrm{i}$，

……………………………………1 分

因为$z\cdot\mathrm{i}+\bar{z}\cdot(1+\mathrm{i})=1+4\mathrm{i}$，所以$a=1,2a-b=4$，解得$b=-2$， ……………………………………3 分

所以$z=1-2\mathrm{i}$；……………………………………………………………………………………4 分

（2）因为$z^2=(1-2\mathrm{i})^2=-3-4\mathrm{i}$，所以$z^2+\dfrac{k}{z^2}=-3-4\mathrm{i}+\dfrac{k(-3+4\mathrm{i})}{(-3-4\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}=-3-4\mathrm{i}+\dfrac{k(-3+4\mathrm{i})}{25}$，

……………………………………………………………………………………………6 分

所以$z^2+\dfrac{k}{z^2}=-3-4\mathrm{i}+\dfrac{k(-3+4\mathrm{i})}{25}=-3-\dfrac{3k}{25}+\dfrac{4k-100}{25}\mathrm{i}$， ……………………………………………8 分

因为$z^2+\dfrac{k}{z^2}$为纯虚数，所以$-3-\dfrac{3k}{25}=0$，$\dfrac{4k-100}{25}\neq 0$，解得$k=-25$ ……………………………10 分

18.【解析】(1) $\because 6S=b(a+c)$，$\therefore 6\times\dfrac{1}{2}bc\sin A=b(a+c)$． ……………………………………………2 分

$\because \sin A=\dfrac{2}{3}$，$\therefore a=c$，即$A=C$． ……………………………………………………………………4 分

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \cos B=-\cos 2A=2\sin^2 A-1=-\dfrac{1}{9}$． ……………………………………………6 分

(2) 由 (1) 可知，$3ac\sin B=b(a+c)$，

因为$b=3, B=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}ac=a+c$， ……………………………………………………………8 分

由余弦定理可知，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以$9=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=\dfrac{3}{4}(ac)^2-3ac$， ……………………………………………10 分

解得$ac=6$（舍去负根），所以$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………12 分

19.【解析】(1) 因为H是垂心，所以$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=0$， ……………………2 分

展开整理可得，$4\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即$bc\cos A=4b^2-3c^2$， ……………………………4 分

由余弦定理可知，$bc\cos A=4b^2-3c^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$，整理得$7c^2-7b^2=a^2$，命题得证；………6 分

(2) 因为$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HA}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}\right)$，

整理得$5\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{HB}+4\overrightarrow{HC}$， ……………………………………………………………………8 分

两边平方，可得$25\left|\overrightarrow{AH}\right|^2=9\left|\overrightarrow{HB}\right|^2+16\left|\overrightarrow{HC}\right|^2+24\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$， ……………………………………10 分

又因为$\left|\overrightarrow{AH}\right|=\left|\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{HC}\right|$，所以$24\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$，即$\angle BHC=\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\angle BAC=\dfrac{\angle BHC}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ ……………………………………………………………………………12 分

20.【解析】(1) 因为在正方形$ABCD$中，$BC\,//\,AD$，

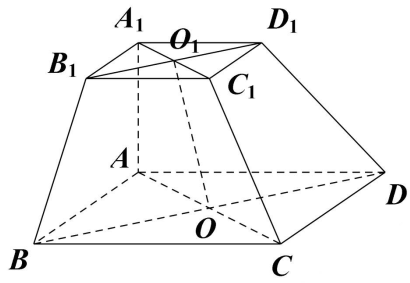
且$BC\not\subset$平面ADD_1A_1，$AD\subset$平面ADD_1A_1，

所以 $BC//$ 平面 ADD_1A_1，……………………………………………………………………2 分

又 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ADD_1A_1=l$，所以 $BC//l$，……………………………4 分

又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，$l\not\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $l//$ 平面 $ABCD$；………………………………………5 分

（2）连接 BD，交 AC 于点 O，



连接 B_1D_1，交 A_1C_1 于点 O_1，连接 OO_1，

在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，易知 $BD//B_1D_1$，

又 $BB_1=DD_1$，所以四边形 BDD_1B_1 为等腰梯形，

所以 $OO_1\perp BD$，……………………………………7 分

因为在正方形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$，且 $AC\cap OO_1=O$，$AC,OO_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $AA_1\perp BD$，…………………………………9 分

又 $AA_1\perp AC$，$AC\cap BD=O,AC,BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，…………………10 分

又正方形 $ABCD$ 的面积 $S_1=4$，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积 $S_2=1$，且 $AA_1=1$，

所以该四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot\left(4+1+\sqrt{4}\right)=\frac{7}{3}$ ………………………………………………………12 分

21.【解析】（1）由余弦定理可知，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4a^2+4b^2-(2c)^2}{8ab}$，……………………………2 分

因为 $a+b=2c$，所以 $\cos C=\frac{4a^2+4b^2-(a+b)^2}{8ab}=\frac{3a^2+3b^2-2ab}{8ab}\geqslant\frac{6ab-2ab}{8ab}$，………………4 分

即 $\cos C\geqslant\frac{1}{2}$，因为 $0<C<\pi$，所以 $C\leqslant\frac{\pi}{3}$，当且仅当 $a=b$ 时，上述等号成立，

所以 C 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$；……………………………………………………………………………6 分

（2）易知 $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}\right)=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\sin B\cos A+\sin A\cos B}{\sin A\sin B}$，………………7 分

结合正余弦定理，可知 $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B\cos C}=\frac{c^2}{ab\cos C}=\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}=$

$$\frac{2(\frac{a+b}{2})^2}{a^2+b^2-(\frac{a+b}{2})^2}=\frac{2}{3-\frac{8ab}{(a+b)^2}}.$$ ……………………………………………………………………9 分

因为 $a+c=a+\frac{a+b}{2}>b$，所以 $b<3a$，同理可知，$a<3b$，所以 $(3a-b)(a-3b)<0$，即

$16ab>3(a+b)^2$，所以 $\frac{ab}{(a+b)^2}>\frac{3}{16}$. ……………………………………………………………………10 分

又 $(a+b)^2\geqslant 4ab$，所以 $\frac{ab}{(a+b)^2}\leqslant\frac{1}{4}$，等号在 $a=b$ 时成立. ……………………………………11 分

所以 $\frac{4}{3}<\frac{2}{3-\frac{8ab}{(a+b)^2}}\leqslant 2$，即 $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}$ 的取值范围是 $(\frac{4}{3},2]$. ……………………………12 分

22.【解析】（1）过 D 作 $DQ\perp PC$，垂足为 Q，

因为平面 $PDC\perp$ 平面 PBC，平面 $PDC\cap$ 平面 $PBC=PC$，

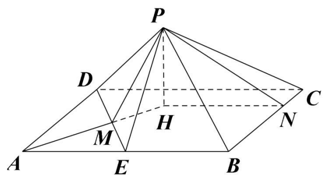
且 $DQ\perp PC$，$DQ\subset$ 平面 PDC，所以 $DQ\perp$ 平面 PBC，……………………………………………2 分

因为 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $DQ\perp BC$，

又 $BC\perp CD$，$CD\cap DQ=D$，$CD,DQ\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp$ 平面 PCD，……………………4 分

又 $BC\subset$ 平面 $BCDE$，所以平面 $PCD\perp$ 平面 $BCDE$. ………………………………6 分

（2）如图，作 $PH\perp$ 平面 $BCDE$，垂足为 H，过 H 分别向 DE,BC 作垂线，垂足分别为 M,N，



连接 AM,PM,PN，则 $PM=AM=\sqrt{2}$，M 是 DE 中点，

易知 $\angle PNH$ 即为二面角 $P-BC-D$ 的平面角，

设 $\angle PMH=\theta$ $(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，………………………8 分

则 $PH=\sqrt{2}\sin\theta, AH=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta$，

所以 $HN=4-\frac{AH}{\sqrt{2}}=3-\cos\theta$，

$$\tan\angle PNH=\frac{PH}{HN}=\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3-\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}}\leqslant\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2},$$ ………………………10 分

当且仅当 $2\cos^2\frac{\theta}{2}=4\sin^2\frac{\theta}{2}$，即 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3},\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，

所以 $PH=\sqrt{2}\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{3}$，……………………………………………………11 分

又四边形 $BCDE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(4+2)\times2=6$，

所以四棱锥 $P-BCDE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times6\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.……………………………………………………12 分