

中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 12 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数  $f(x) = \ln(a - 3x)$  的定义域为  $A$ ，若  $4 \in A$ ， $5 \notin A$ ，则  $a$  的取值范围是（ ）

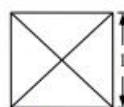
- A. (12,15)      B. [12,15)      C. (12,15]      D. [12,15]

2. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x + y - 6 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = \frac{x + 2y + 2}{x + 1}$  的取值范围是（ ）

- A. [2,4]      B.  $[\frac{11}{4}, 4]$       C. [3,5]      D.  $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

3. 已知某几何体的俯视图是如图所示的边长为 1 的正方形，正视图与侧视图都是边长为 1 的正三角形，则此几何体的体积是（ ）

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$



(第 3 题图)

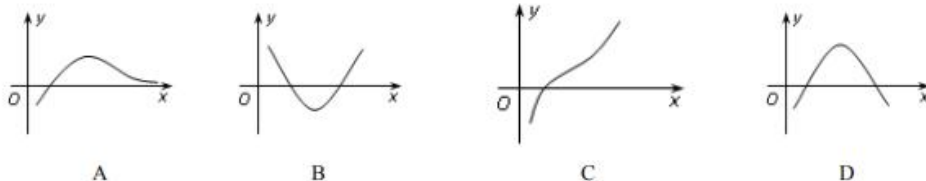
4. 直线  $l$  过抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点  $F$ ，与该抛物线及其准线依次交于  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点（其中  $B$  在  $A$ 、 $C$  之间），若  $|BC| = 3|BF|$ ， $|AF| = 3$ ，则  $p =$ （ ）

- A. 2      B.  $2\sqrt{2}$       C. 3      D. 4

5. 定义  $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ，若  $\prod_{k=1}^{2019} [1 + (2k - 1)x]$  展开式中  $x$  一次项的系数为  $m$ ，则  $i^m$  等于（ $i$  为虚数单位）（ ）

- A.  $-i$       B.  $i$       C. 1      D. -1

6. 函数  $f(x) = \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$  的大致图象是（ ）



7. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  的公比不为1,  $T_n$  为其前  $n$  项积, 若  $T_3=T_7$ , 则  $\frac{\ln a_5}{\ln a_3} = ( \quad )$
- A. 5:3                      B. 3:5                      C. 5:1                      D. 1:5
8. 在  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ . 若  $A=120^\circ$ ,  $a=1$ , 则  $2b+3c$  的最大值为  $( \quad )$
- A. 3                          B.  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$                       C.  $3\sqrt{2}$                       D.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
9. 已知  $a > b > 0$ , 有下列命题:
- ①若  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$ , 则  $a - b < 1$ ;                      ②若  $a^2 - b^2 = 1$ , 则  $a - b < 1$ ;
- ③若  $a^3 - b^3 = 1$ , 则  $a - b < 1$ ;                      ④若  $a^4 - b^4 = 1$ , 则  $a - b < 1$ ;
- 其中真命题的个数为  $( \quad )$
- A. 1                          B. 2                          C. 3                          D. 4
10. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为  $R$ , 圆心角为  $\sqrt{2}\pi$  的扇形, 圆锥内接圆柱的全面积与圆锥的侧面积相等, 则圆柱的高为  $( \quad )$
- A.  $\frac{1}{2}R$                       B.  $\frac{2}{3}R$                       C.  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$                       D.  $\frac{\sqrt{3}-1}{3}R$
11. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点为  $A$ , 下顶点为  $B$ , 左焦点为  $F$ , 若  $\triangle ABF$  外接圆的圆心在直线  $y = x$  的右下方, 则此椭圆的离心率的取值范围是  $( \quad )$
- A.  $(\frac{1}{2}, 1)$                       B.  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$                       C.  $(0, \frac{1}{2})$                       D.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
12. 已知函数  $f(x) = |x-a| - \frac{3}{x} + a (a \in \mathbf{R})$ , 若方程  $f(x) = 2$  有且只有三个不同的实数根, 则  $a$  的取值范围是  $( \quad )$
- A.  $(1 + \sqrt{3}, 3)$                       B.  $(-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$
- C.  $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$                       D.  $(-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$

**二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分.**

13. 若函数  $f(x) = \log_3 |\alpha x + 1|$  图象的对称轴是  $x = 2$ , 则非零实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
14. 已知  $A(1,1)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(1,0)$ ,  $M$  为线段  $BC$  上一点, 且  $\overline{CM} = \lambda \overline{CB}$ , 若  $\overline{MA} \cdot \overline{BC} \geq \overline{MB} \cdot \overline{MC}$ , 则实数  $\lambda$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 设  $F_1, F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点,  $M$  是双曲线上任意一点, 过  $F_1$  作  $\angle F_1 M F_2$  平分线的垂线, 垂足为  $Q$ , 则点  $Q$  的轨迹方程是\_\_\_\_\_.
16. 若对任意的  $x \in D$ , 均有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  成立, 则称函数  $f(x)$  为函数  $g(x)$  和函数  $h(x)$  在区间  $D$  上的“M 函数”. 已知函数  $f(x) = (k-1)x-1$ ,  $g(x) = -3$ ,  $h(x) = (x+1)\ln x$ , 且  $f(x)$  是  $g(x)$  和  $h(x)$  在区间  $[1, 2]$  上的“M 函数”, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.**

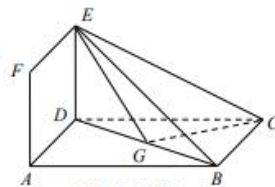
(一) 必考题: 60 分.

17. (12 分) 已知函数  $f(x) = 4 \sin x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}$ .

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为角  $A, B, C$  的对边, 且满足  $a \sin B + b \cos 2A = b \cos A$ , 求  $f(B)$  的取值范围.

18. (12 分) 如图, 正方形  $ADEF$  与  $\square ABCD$  所在的平面互相垂直, 且  $AB = 2AD = 2a$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $G$  为  $BD$  的中点.



(I) 求证: 平面  $BDE \perp$  平面  $BCE$ ;

(II) 求平面  $CGE$  与平面  $ADEF$  所成锐二面角的余弦值.

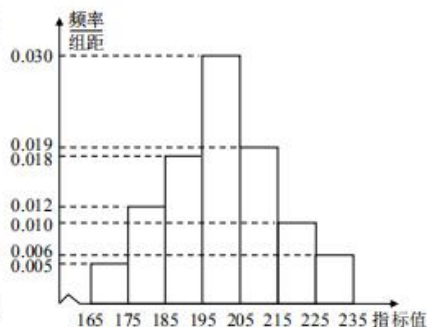
19. (12 分) 为加强对企业产品质量的管理, 市质监局到区机械厂抽查机器零件的质量, 共抽取了 600 件螺帽, 将它们的直径和螺纹距之比  $Z$  作为一项质量指标, 由测量结果得如下频率分布直方图:

(I) 求这 600 件螺帽质量指标值的样本平均数  $\bar{x}$ , 样本方差  $s^2$  (在同一组数据中, 用该区间的中点值作代表);

(II) 由频率分布直方图可以近似的认为, 这种螺帽的质量指标值  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ,  $\sigma^2$  近似为样本方差  $s^2$ .

(i) 利用该正态分布, 求  $P(185.03 < Z < 229.94)$ ;

(ii) 现从该企业购买了 100 件这种螺帽, 记  $X$  表示这 100 件螺帽中质量指标值位于区间  $(185.03, 229.94)$  的件数, 利用 (i) 的结果, 求  $E(X)$ .



附:  $\sqrt{224} \approx 14.97$ .

若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ,  $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ .

20. (12分) 已知  $A, B$  是  $x$  轴正半轴上两点 ( $A$  在  $B$  的左侧), 且  $|AB| = a (a > 0)$ , 过  $A, B$  作  $x$  轴的垂线, 与抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  在第一象限分别交于  $D, C$  两点.

(I) 若  $a = p$ , 点  $A$  与抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点重合, 求直线  $CD$  的斜率;

(II) 若  $O$  为坐标原点, 记  $\triangle OCD$  的面积为  $S_1$ , 梯形  $ABCD$  的面积为  $S_2$ , 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的取值范围.

21. (12分) 已知函数  $f(x) = (ax+1)e^x$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 当  $a > 0$  时, 证明:  $f(x) + \frac{a}{e} > 0$ ;

(II) 当  $a = -\frac{1}{2}$  时, 如果  $x_1 \neq x_2$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 证明:  $x_1 + x_2 < 2$ .

**选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.**

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程选讲] (10 分)

已知曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 以平面直角坐标系的原点为极点,  $x$  的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线  $C$  的极坐标方程;

(II)  $P, Q$  为曲线  $C$  上两点, 若  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ , 求  $\frac{|\overrightarrow{OP}|^2 \cdot |\overrightarrow{OQ}|^2}{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2}$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+2| - a|2x-1|$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 0$  的解集;

(II) 若存在  $x \in \mathbf{R}$ , 使得不等式  $f(x) > a$  成立, 求  $a$  的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主招生在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注