机密★启用前

2023年阳泉市高三年级第三次模拟测试试题

高三数学参考答案和评分标准

一、单项选择题:(每小题5分,共40分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	A	C	B	B	D	D	B	C

二、多项选择题:(每小题5分,共20分)

题号	9	10	11	12
选项	ABD	ACD	BCD	BC

三、填空题:(每小题5分,共20分)

(13) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(14)3500　　(15) $\frac{20}{3}$　　(16)(4,5)

四、解答题:(本大题共6小题,共70分)

(17)解:(1) $\because 2a_{n+1}-a_n a_{n+1}=1$,

$\therefore a_{n+1}(2-a_n)=1$,又 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$,即 $a_n=\frac{1}{b_n}+1$,

代入 $a_{n+1}(2-a_n)=1$ 中有 $(\frac{1}{b_{n+1}}+1)(1-\frac{1}{b_n})=1$,化简得 $b_{n+1}=b_n-1$, ········· (3分)

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$ 为首项,-1 为公差的等差数列,

$\therefore b_n=\frac{1}{2}-(n-1)=\frac{3-2n}{2}$. ··· (5分)

(2)$\because b_n=\frac{3-2n}{2}, b_{n+1}=\frac{1-2n}{2}$.

$\therefore \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}=\frac{4}{(2n-3)(2n-1)}=2(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})$ ……………………………… (8分)

$\therefore S_n=2(-1-\frac{1}{2n-1})=\frac{-4n}{2n-1}$. ………………………………………………… (10分)

18.解:(1)$\because b^2+c^2=a^2-bc$,

$\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$. ……………………………………………………………… (1分)

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$. ……………………………………… (3分)

$\because 0<A<\pi$, $\therefore A=\frac{2\pi}{3}$. …………………………………………………… (4分)

(2)由 $b\sin A=4\sin B$ 及正弦定理,得 $ab=4b$, ……………………………………… (5分)

$\therefore a=4$. ………………………………………………………………………… (6分)

由余弦定理得,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant 2bc+bc$. ………………………………… (7分)

$\therefore bc\leqslant\frac{16}{3}$. ………………………………………………………………… (8分)

当且仅当 $b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立. ……………………………………………… (9分)

$\because \lg b+\lg c\geqslant 1-2\cos(B+C)$,$\therefore \lg(bc)\geqslant 1+2\cos A=0$,则 $bc\geqslant 1$, …………………… (10分)

$\therefore 1\leqslant bc\leqslant\frac{16}{3}$,$\because$ △ABC 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A$,

$\therefore$ △ABC 面积的取值范围是$[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{4\sqrt{3}}{3}]$. ………………………………… (12分)

19.解:(1)每辆车智能检测中安全检测、电池检测、性能检测三项指标达标的概率

分别记为 P_1,P_2,P_3,并记芯片智能检测不达标为事件 A.

则有 $P_1=\frac{99}{100}$, $P_2=\frac{98}{99}$, $P_3=\frac{97}{98}$,

$P(A)=1-P_1P_2P_3=1-\frac{99}{100}\times\frac{98}{99}\times\frac{97}{98}=\frac{3}{100}$,

$\therefore$ 每辆车智能检测不达标的概率为 $\frac{3}{100}$. …………………………………… (4分)

(2)人工抽检30辆车恰有1个不合格品的概率为 $\varphi(p)=C_{30}^1p^1(1-p)^{29}(0<p<1)$,

因此 $\varphi'(p)=C_{30}^1[(1-p)^{29}-29p(1-p)^{28}]=C_{30}^1(1-p)^{28}(1-30p)$ …………………… (6分)

令 $\varphi'(p)=0$,得 $p=\frac{1}{30}$.

当 $p\in(0,\frac{1}{30})$时,$\varphi'(p)>0$;当 $p\in(\frac{1}{30},1)$时,$\varphi'(p)<0$.

则 $\varphi(p)$在$(0,\frac{1}{30})$上单调递增,在$(\frac{1}{30},1)$上单调递减,

$\therefore\varphi(p)$有唯一的极大值点 $p_0=\frac{1}{30}$. …………………………………………… (8分)

(3)设每辆车人工抽检达标为事件 B,工人在流水线进行人工抽检时,

抽检一辆车恰为合格品为事件 C,

由(2)得:$P(C)=P(B\mid\overline{A})=1-p=\frac{29}{30}$,

由(1)得:$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{97}{100}$,

$\therefore P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})=\frac{29}{30}\times\frac{97}{100}\approx93.8\%<96\%$,

因此,公司需对生产工序进行改良. ………………………………………………… (12分)

20.(1)如图,连接 OE,OF,

$\because$ 三棱锥 $E-ABD$ 和 $F-BCD$ 均是棱长 2 的正四面体,

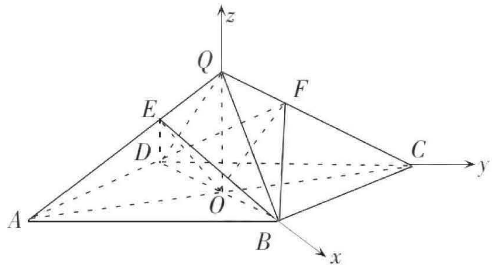
$\therefore AO=OC=OE=OF=\sqrt{3}$,$AE=FC=2$,

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$, $\therefore \angle EAO=\angle FCO$,$\therefore OQ\perp AC$. ································ (2分)

$\because BF=DF,QF=QF,\angle BFQ=\angle DFQ=\dfrac{2\pi}{3}$.

$\therefore \triangle BFQ\cong\triangle DFQ$, $\therefore BQ=DQ$, $\therefore OQ\perp BD$. ·· (4分)

又 $AC\cap BD=O$,$AC,BD\subset$平面 $ABCD$, $\therefore OQ\perp$平面 $ABCD$. ····················· (5分)



(2)易得四边形 $ABCD$ 是菱形,则 $AC\perp BD$, $\therefore OQ,AC,BD$ 两两垂直,

$\therefore$ 以 O 为原点建立空间直角坐标系如图:

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$D(-1,0,0)$,$Q(0,0,\sqrt{6})$,

故$\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DQ}=(1,0,\sqrt{6})$,

$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{CQ}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{6})$. ··· (6分)

设平面 AQD 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\mathbf{m}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\mathbf{m}=x_1+\sqrt{6}z_1=0\end{cases}$,

令 $x_1=\sqrt{6}$,则 $y_1=\sqrt{2}$,$z_1=-1$,故 $\mathbf{m}=(\sqrt{6},\sqrt{2},-1)$. ····················· (8分)

高三数学试题答案第 4 页(共 7 页)

设平面 BCF 的法向量为 $\mathbf{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\mathbf{n}=-x_2+\sqrt{3}\,y_2=0\\ \overrightarrow{CQ}\cdot\mathbf{n}=-\sqrt{3}\,y_2+\sqrt{6}\,z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=\sqrt{6}$，则 $y_2=\sqrt{2}$，$z_2=1$，故 $\mathbf{n}=(\sqrt{6},\sqrt{2},1)$. ……………………（10 分）

$\therefore \cos<\mathbf{m},\mathbf{n}>=\dfrac{|\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\dfrac{|6+2-1|}{\sqrt{6+2+1}\times\sqrt{6+2+1}}=\dfrac{7}{9}$ ……………………（11 分）

$\therefore$ 平面 ADQ 与平面 BCF 夹角的余弦值为 $\dfrac{7}{9}$. ……………………（12 分）

21.解：(1)不妨设点 P 在 x 轴的上方，由椭圆的性质可知 $|OA|=a$.

$\because\triangle APO$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形，$\therefore P(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})$，

代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得 $\dfrac{\frac{a^2}{4}}{a^2}+\dfrac{\frac{a^2}{4}}{b^2}=1$，整理，得 $a^2=3b^2$. ……………………（2 分）

$\because\triangle APO$ 的面积为 1，$\therefore \dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{a}{2}=1$，$\therefore a^2=4$，$b^2=\dfrac{4}{3}$.

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$. ……………………（4 分）

(2)设直线 AM 的斜率为 k_1，直线 BN 的斜率为 k_2，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

直线 MN 的方程为 $x=my+1$.

不妨设 $y_2<0<y_1$，则 $k_1=\tan\angle MAB$，$k_2=\tan\angle NBA$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ x^2+3y^2=4,\end{cases}$ 可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+36>0$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+3}$， ……………………（6 分）

$\therefore \dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\dfrac{2m}{3}$，即 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，…………………………………………… （8分）

则 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{x_2-2}{y_2}=\dfrac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2}=\dfrac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$ ………………………… （9分）

$=\dfrac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\dfrac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore 3k_1=k_2$. ………………………………………………………………………… （11分）

故 $3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$ 得证. ……………………………………………… （12分）

22.解：(1) $f(x)=e^x-ax^2+2ax-1$，$f'(x)=e^x-2ax+2a$，

令 $\varphi(x)=f'(x)=e^x-2ax+2a$，则 $\varphi'(x)=e^x-2a$.

因 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，故 $\varphi(x)=e^x-2ax+2a$ 有两个零点 ………… （2分）

若 $a\leqslant0$，则 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，不可能有两个零点 ………………… （3分）

$\therefore a>0$，令 $\varphi'(x)=e^x-2a=0$ 得 $x=\ln 2a$

当 $x\in(-\infty,\ln2a)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln 2a,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(\ln 2a)=4a-2a\ln(2a)$ ………………………………………… （4分）

$\because \varphi(x)$ 有两个零点，$\therefore 4a-2a\ln(2a)<0$，则 $a>\dfrac{1}{2}e^2$.

又 $\varphi(0)=1+2a>0,\varphi(1)=e>0,\therefore a>\frac{1}{2}e^2$. …………………………………………………（5分）

（2）设 $x_1<x_2,\because\varphi(1)=e>0,\varphi(2)=e^2-2a<0$，则 $1<x_1<2<x_2$ ………………………………（6分）

$\because\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0,\therefore e^{x_1}=2ax_1-2a,e^{x_2}=2ax_2-2a$ ……………………………………（7分）

则 $\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=\frac{x_2-1}{x_1-1}$，取对数得 $x_2-x_1=\ln(x_2-1)-\ln(x_1-1)$.

令 $x_1-1=t_1,x_2-1=t_2$，则 $t_2-t_1=\ln t_2-\ln t_1=2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$ ………………………………（8分）

令 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$ ……………………………………………………………（9分）

则 $F'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)}>0,\therefore F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

则 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>F(1)=0,\therefore\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$

则 $t_2-t_1=2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}>2\frac{2\left(\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}-1\right)}{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}+1}=4\cdot\frac{\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}$. ………………………………（11分）

两边约去 $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}$ 后化简整理

得 $\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}>2$，即 $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}>2$. ………………………………………………（12分）

（以上答案仅供参考，如有不同解法酌情给分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。