2022 届高三上学期期中考数学试卷

2021.10

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}$（其中 i 为虚数单位），则 z 的共轭复数为（　）

A. $-1-i$　　B. $-1+i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

2. 已知全集 U 为 R，集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+2}\le 0\right.\right\}$，则 $A\cap\left(C_U B\right)$ 的元素个数为（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设 a,b 都是不等于 1 的正数，则“$3^a>3^b>3$”是“$\log_a 3<\log_b 3$”的（　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件　　C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_5+a_7+a_9=$（　）

A. 21　　B. 42　　C. 63　　D. 84

6. 已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-3\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是（　　）

A. $-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$　　C. $-2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

7. 设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是(　)

A. 若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　　B. 若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m//n$

C. 若 $\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，$n\perp m$，则 $n\perp\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$，$m//n$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

8. 若函数 $f(x)=a(x-2)e^x+\ln x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上存在两个极值点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-\dfrac{1}{4e^2})$　　B. $(-\infty,-\dfrac{1}{e})$　　C. $(-\infty,-\dfrac{1}{e})\cup(-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{4e^2})$　　D. $(-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{4e^2})\cup(1,+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项

符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 把函数 $f(x)=2sinx$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再把所得的函数图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)得到函数 $g(x)$的图象，关于 $g(x)$的说法正确的是(　)

A. 函数 $g(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{3},0)$对称　　B. 函数 $g(x)$的图象的一条对称轴是 $x=-\frac{\pi}{12}$

C. 函数 $g(x)$在区间$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$上的最小值为$\sqrt{3}$　　D. 函数 $g(x)\in[0,\pi]$上单调递增

10. 已知向量$\vec{a}=(-2,1)$，$\vec{b}=(1,t)$，则下列说法正确的是（　　）

A.若$\vec{a}//\vec{b}$，则 t 的值为-2　　B.$|\vec{a}+\vec{b}|$的最小值为 1

C.若$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 t 的值为 2　　D.若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则 t 的取值范围是 $t<2$

11. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公差为 d．已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$a_7<0$，则（　　）

A. $a_6>0$　　B. $-\frac{24}{7}<d<-3$　　C. 当 $S_n<0$ 时，n 的最小值为 13

D. 数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$中最小项为第 6 项

12. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=BB_1$，O 为 A_1C 的中点.点 P 满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，则（　　）

A.对$\forall\lambda\in[0,1]$时，都有 $A_1P\perp OB_1$

B.当$\lambda=\frac{1}{3}$时，直线 A_1P 与 AB 所成的角是 30°

C.当$\lambda=\frac{1}{2}$时，直线 A_1P 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角的正切值$\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.当$\lambda=\frac{1}{2}$时，直线 A_1P 与 OB_1 相交于一点 Q，则$\frac{PQ}{QA_1}=\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\geq0$ 时，$f(x)=2^x+m$，则 $f(-2)=$________.

14. 把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是θ_1℃，空气的温度是θ_0℃，则 t min 后物体的温

度θ（单位：℃）可由公式$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$求得，其中$k$是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数，现有52℃的物体，放在12℃的空气中冷却，2min以后物体的温度是32℃，则再经过6min该物体的温度可冷却到__________℃.

15. 正三角形ABC的边长为2，将它沿高AD翻折，使点B与点C间的距离为$\sqrt{3}$，此时四面体$ABCD$外接球表面积为________；

16. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，BC边上的高为$\frac{a}{2}$，则$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$的最大值是____.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（满分10分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$2a_n=S_n+n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求证：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

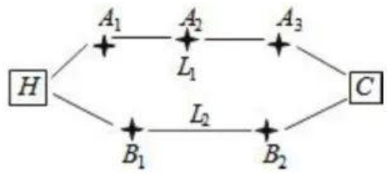
（2）记$c_n=\dfrac{1}{\log_2(a_n+1)\cdot\log_2(a_{n+2}+1)}$，求证：数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n<\frac{3}{4}$.

18.（满分12分）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知A为锐角，$\sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$.

（1）求A；

（2）若$b=\frac{\sqrt{3}}{4}c$，且BC边上的高为$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积.

19.(满分12分）如图，李先生家住H小区，他工作在C科技园区，从家开车到公司上班路上有L_1、L_2两条路线，L_1路线上有A_1、A_2、A_3三个路口，各路口遇到红灯的概率均为$\frac{1}{2}$；L_2路线上有B_1、B_2两个路口，各路口遇到红灯的概率依次为$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{5}$.

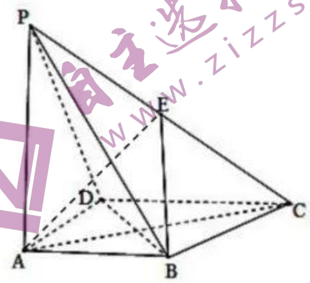


(1)若走L_1路线，求最多遇到1次红灯的概率；
(2)若走L_2路线，求遇到红灯次数X的数学期望；
(3)按照“平均遇到红灯次数最少”的要求，请你帮助李先生从上述两条路线中选择一条最好的上班路线，并说明理由.

20.（满分 12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$， $AD\perp AB$，$AB//CD$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$．点 E 为棱 PC 的中点．

（1）证明：$PD\perp$ 平面 ABE；

（2）若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF\perp AC$，求二面角 $F-AB-D$ 的正弦值．



21.（满分 12 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n+r$，其中 r 为常数．

（1）求 r 的值；

（2）设 $b_n=2(1+\log_2 a_n)$，若数列 $\{b_n\}$ 中去掉数列 $\{a_n\}$ 的项后余下的项按原来的顺序组成数列 $\{c_n\}$，求 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}$ 的值．

22.（满分 12 分）已知函数 $f(x)=e^x-1$，$g(x)=a\sin x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）若 $a=-1$，证明：当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$；

（2）讨论 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上零点的个数．