2022～2023 学年新乡市高二期末(下)测试
数学参考答案

1. C　$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i}$.

2. B　因为 $M\cup N=\{x|x>-2\}$，所以 $\complement_U(M\cup N)=\{x|x\leqslant-2\}$.

3. A　因为 $g(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$ 为奇函数，$h(x)=\cos 2x$ 为偶函数，所以 $f(x)=g(x)h(x)$ 为奇函数，排除 B 与 C. 当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$g(x)>0$ 且 $h(x)>0$，所以 $f(x)=g(x)h(x)>0$，故选 A.

4. B　设招聘 x 名硕士生，由题意可知，$x+400\times0.4=(400+80+x)\times(0.4-0.04)$，解得 $x=20$，所以本科生教师共分得树苗 $\frac{40}{400+80+20}\times1500=120$ 棵.

5. C　因为 $a=\log_3 0.3<0$，$b=\sin\frac{3\pi}{5}\in(0,1)$，$c=5^{0.1}>1$，所以 $a<b<c$.

6. B　连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OE，AB_1，AC_1. 若 $x\cos x<1$，则 $x<\frac{1}{\cos x}$，而 $\frac{1}{\cos x}>1$，所以"$x\cos x<1$"推不出"$x<1$"；若 $x<1$，又 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\cos x<1$，所以 $0<x\cos x<1$，即"$x<1$"可以推出"$x\cos x<1$".

7. D　连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OE，AB_1.

因为 $AC\perp BD$，$BD\perp AA_1$，

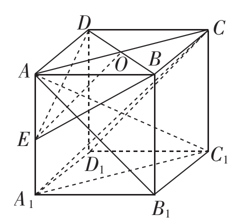
所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BD\perp AC_1$，A 正确；

因为 $AC_1\perp$ 平面 BDE，所以 $AC_1\perp BE$，

因为 $BE\perp AD$，$AD\cap AC_1=A$，所以 $BE\perp$ 平面 AB_1C_1D，

所以 $BE\perp AB_1$，所以 $\tan\angle BAB_1=\tan\angle BEA$，解得 $BB_1=\sqrt{2}BA$，

所以四边形 AA_1C_1C 为正方形，所以 $AC_1\perp A_1C$，B 正确；



因为 OE 为 $\triangle AA_1C$ 的中位线，所以 $A_1C\parallel OE$，又 $A_1C\not\subset$ 平面 BDE，$OE\subset$ 平面 BDE，所以 $A_1C\parallel$ 平面 BDE，C 正确；

因为 $AC_1\perp$ 平面 BDE，而 AC_1 与平面 A_1D_1C 相交，所以平面 A_1D_1C 不垂直于平面 BDE，D 错误.

8. D　①若《周易》不排，共有 $\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^2=12$ 种安排方式.

②若排《周易》且《诗经》与《礼记》都安排，共有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^2-\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2=20$ 种安排方式；若排《周易》且《诗经》与《礼记》只安排一个，共有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_3^3=36$ 种安排方式.

所以共有 $12+20+36=68$ 种安排方式.

9. BD　因为圆心 $C(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{4+6}{5}=2$，所以 A 错误，B 正确.

因为$|EF|=2\sqrt{9-2^2}=2\sqrt{5}$，所以 C 错误，D 正确.

10. BC　$f(x)$的最小正周期为 π，所以 A 错误；

由 $f'(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})=0$，得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 B 正确；

将 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$的图象，所以 C 正确；

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2+k\pi(k\in\mathbf{Z})$或 $x_1=\frac{2\pi}{3}-x_2+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 D 错误.

11. ACD　由已知可得 $c=\sqrt{3}$，$b=1$，$a=\sqrt{2}$，则 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，A 正确；

因为$|PF_2|$的最小值为 $c-a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，所以 B 错误；

设 $P(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，所以 C 正确；

设$\angle F_1PF_2=\theta$，则$\triangle PF_1F_2$ 的面积为$\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，所以 D 正确.

12. AB　设 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=1+\ln x$，$f''(x)=\frac{1}{x}>0$，

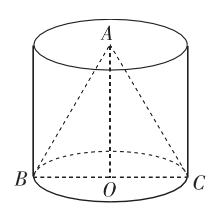
所以函数 $f(x)=x\ln x$ 在$(0,+\infty)$上的图象是下凸的，

所以$\frac{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}{2}=\frac{f(x)+f(2-x)}{2}\geqslant f(\frac{x+2-x}{2})=f(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $m^2-2m\leqslant 0$，得 $0\leqslant m\leqslant 2$，则整数 m 的值可能为 1 或 2.

13. 3　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $2-2m+m+1=0$，解得 $m=3$.

14. $\frac{1}{2}$　由 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，所以 $\cos(\frac{\pi}{3}+2\alpha)=1-2\sin^2(\frac{\pi}{6}+\alpha)=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

15. $\frac{1}{2\pi}$　因为圆柱母线与圆锥旋转轴平行，所以圆柱母线与圆锥母线所成角的大小等于$\angle BAO$. 因为圆柱侧面的展开图恰好为正方形，所以 $2\pi\times BO=OA$，所以 $\tan\angle BAO=\frac{BO}{OA}=\frac{1}{2\pi}$.



16. 80　设直线 OA 的方程为 $y=kx$，与 $y^2=4x$ 联立，得 $k^2x^2-4x=0$，可得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{k^2}$，所以点 A 的坐标为$(\frac{4}{k^2},\frac{4}{k})$，同理可得点 B 的坐标为$(4k^2,-4k)$，所以 $k_{AB}=\frac{\frac{4}{k}+4k}{\frac{4}{k^2}-4k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}-k}=\frac{k}{1-k^2}$，

所以直线 AB 的方程为 $y+4k=\frac{k}{1-k^2}(x-4k^2)$，化简得 $y=\frac{k}{1-k^2}(x-4)$，易知直线 AB 过定点$(4,0)$. 设$\frac{k}{1-k^2}=m$，则直线 AB 的方程为 $y=m(x-4)$，直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{m}(x-4)$. 由$\begin{cases}y=m(x-4),\\y^2=4x,\end{cases}$消去 x 得$\frac{my^2}{4}-y-4m=0$，$\Delta=1+4m^2>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{4}{m}$，$y_1y_2=-16$，

$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\sqrt{\frac{16}{m^2}+64}=4\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m^2}+4}$. 同理$|CD|=4\sqrt{1+m^2}\sqrt{m^2+4}$.

所以四边形 $ACBD$ 的面积$S=\frac{1}{2}|AB||CD|=\frac{1}{2}\times4\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\sqrt{\frac{1}{m^2}+4}\times4\sqrt{1+m^2}\sqrt{m^2+4}$
$=8\sqrt{(1+\frac{1}{m^2})(1+m^2)}\sqrt{(\frac{1}{m^2}+4)(m^2+4)}=8\sqrt{2+m^2+\frac{1}{m^2}}\sqrt{17+4m^2+\frac{4}{m^2}}\geqslant8\sqrt{2+2}\times\sqrt{17+4\times2}=80$，当且仅当$\frac{1}{m^2}=m^2$，即 $m=\pm1$ 时，等号成立，所以四边形 $ACBD$ 的面积的最小值为 80.

17. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，因为 $2a_2-a_3=1$，所以 $a_1+a_3-a_3=1$，即 $a_1=1$. ………………………………………………………… 2 分

又 $2a_2+a_3+2=a_6$，所以 $2(1+d)+1+2d+2=1+5d$，解得 $d=4$，…………………… 4 分

所以 $a_n=4n-3$. ………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $b_n=\frac{1}{(a_n+3)(a_{n+1}+3)}=\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，………………………… 7 分

所以 $T_n=\frac{1}{16}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\frac{1}{16}(1-\frac{1}{n+1})$. ……………… 8 分

由 $T_m\leqslant\frac{1}{18}$，得$\frac{1}{16}(1-\frac{1}{m+1})\leqslant\frac{1}{18}$，解得 $m\leqslant8$，即 m 的最大值为 8. …………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以$(a+b)^2-c^2-3ab=0$，化简得 $a^2+b^2-c^2=ab$， …………… 2 分

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………… 4 分

(2)因为 $\cos B=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos\frac{\pi}{3}+\cos B\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ……… 6 分

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $a=\frac{8\times\frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=10$，…………………… 7 分

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得$AD^2=DC^2+AC^2-2DC\cdot AC\cos C$，

即$DC^2-8DC+15=0$，所以$DC=3$或$DC=5$. …………………………………… 9分

当$DC=3$时，$BD=BC-DC=7$，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{7}{3}$，…………………………………… 10分

当$DC=5$时，$BD=BC-DC=5$，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{BD}{DC}=1$，…………………………………… 11分

所以$\dfrac{S_1}{S_2}$的值为$\dfrac{7}{3}$或1. …………………………………… 12分

19. 解：(1)由题意可知，$P_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}+(1-\dfrac{1}{3})\times(1-\dfrac{2}{5})=\dfrac{8}{15}$，…………………………………… 2分

$P_2=C_2^1[\dfrac{1}{3}\times(1-\dfrac{2}{5})]\times[(1-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{2}{5}]+\dfrac{8}{15}\times\dfrac{8}{15}=\dfrac{88}{225}$. …………………………………… 5分

(2)由题意可知，$X=0,2,4$，

$P(X=4)=(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5})^2=\dfrac{4}{225}$，…………………………………… 7分

$P(X=2)=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}+C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}+C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{52}{225}$，…

…………………………………… 9分

$P(X=0)=1-\dfrac{52}{225}-\dfrac{4}{225}=\dfrac{169}{225}$. …………………………………… 10分

X的分布列为

X	0	2	4
P	$\dfrac{169}{225}$	$\dfrac{52}{225}$	$\dfrac{4}{225}$

…………………………………… 11分

$E(X)=0\times\dfrac{169}{225}+2\times\dfrac{52}{225}+4\times\dfrac{4}{225}=\dfrac{8}{15}$. …………………………………… 12分

20. (1)证明：取AD的中点O，连接OP，OC.

因为$\triangle PAD$为等边三角形，所以$PO\perp AD$. …………………………………… 1分

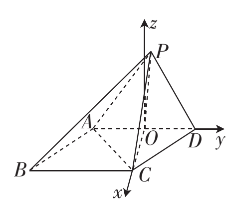
又$PC\perp AD$，$PO\cap PC=P$，

所以$AD\perp$平面PCO，…………………………………… 3分

所以$AD\perp CO$，即OC是线段AD的中垂线，

所以$AC=CD$. …………………………………… 5分

(2)解：由(1)知$PO\perp AD$，又$AC=CD=2$，所以$CO\perp AD$，所以$AD\perp$平面PCO.



以O为坐标原点，分别以$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$的方向为x，y轴的正方向，建立空间直角坐标系，

则$A(0,-1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,1,0)$.

在$\triangle POC$中，$PO=OC=\sqrt{3}$，$PC=3$，所以点P的坐标为$(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$， ……………… 6分

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$. ………………………… 7分

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面PAB的法向量，可得$\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\-\frac{\sqrt{3}}{2}x+y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$令$y=3$，得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},3,-1)$. …………………………………………………………………………………… 9分

设$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$是平面$PAD$的法向量，可得$\begin{cases}2y_1=0,\\-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+y_1+\frac{3}{2}z_1=0,\end{cases}$令$z_1=1$，得$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$. ……………………………………………………………………………… 11分

设平面PAB与平面PAD所成的二面角为θ，

则$|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………………………… 12分

21. 解：(1)设椭圆E的焦距为$2c$，依题意，得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\a+c=3,\end{cases}$ …………………………………… 2分

解得$\begin{cases}a=2,\\c=1,\end{cases}$则$b=\sqrt{3}$， …………………………………………………………………… 3分

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………… 4分

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_1,-y_1)$，$P(x_2,y_2)$，$M(m,0)$，$N(n,0)$，

则直线AP的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-m}(x-m)$，

联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=\frac{y_1}{x_1-m}(x-m),\end{cases}$消去$y$并整理得$(3x_1^2-6mx_1+3m^2+4y_1^2)x^2-8my_1^2x+4m^2y_1^2-12(x_1-m)^2=0$，

则$x_1+x_2=\frac{8my_1^2}{3x_1^2-6mx_1+3m^2+4y_1^2}$. ………………………………………………… 6分

同理由直线BP的方程$y=\frac{-y_1}{x_1-n}(x-n)$，与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$联立，消去$y$并整理得$(3x_1^2-6nx_1+3n^2+4y_1^2)x^2-8ny_1^2x+4n^2y_1^2-12(x_1-n)^2=0$，

则$x_1+x_2=\frac{8ny_1^2}{3x_1^2-6nx_1+3n^2+4y_1^2}$， ………………………………………………… 7分

所以$\frac{8my_1^2}{3x_1^2-6mx_1+3m^2+4y_1^2}=\frac{8ny_1^2}{3x_1^2-6nx_1+3n^2+4y_1^2}$，

所以 $m(3x_1^2-6nx_1+3n^2+4y_1^2)=n(3x_1^2-6mx_1+3m^2+4y_1^2)$，

化简得 $3(m-n)x_1^2+4(m-n)y_1^2=3mn(m-n)$. ………………………………………… 9 分

当 $m\neq n$ 时，$3x_1^2+4y_1^2=3mn$，由已知得 $3x_1^2+4y_1^2=12$，所以 $mn=4$. ………………… 10 分

当 $m=n$ 时，M,N,P 三点重合，这时 $|m|=|n|=a=2$. ……………………………………… 11 分

综上，$|OM|\cdot|ON|=|m||n|=4$，即 $|OM|\cdot|ON|$ 为定值 4. ………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $f(1)=4a$，得 $3a-b-c=0$，又 $b=-6a$，所以 $c=9a$，………………………………… 1 分

则 $f(x)=ax^3-6ax^2+9ax$，所以 $f'(x)=3a(x-1)(x-3)$，$a\neq 0$. ……………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 与 $(3,+\infty)$ 上为增函数，在 $(1,3)$ 上为减函数；……………… 4 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 与 $(3,+\infty)$ 上为减函数，在 $(1,3)$ 上为增函数. ……………… 5 分

(2) $f(x)=ax^3-6ax^2+9ax=ax(x-3)^2$，由 $F(x)=0$，

得 $ax(x-3)^2-xe^{-x}=0$，解得 $x=0$ 或 $a(x-3)^2-e^{-x}=0$.

因为 $x\in[0,3]$，所以 $x_1=0$，x_2,x_3 是 $a(x-3)^2-e^{-x}=0$ 的正根，$x_1+x_2+x_3=x_2+x_3$，…

……………………………………………………………………………………………… 6 分

则 $\ln[a(x-3)^2]=\ln e^{-x}=-x$，$\ln a+2\ln(3-x_2)=-x_2$，$\ln a+2\ln(3-x_3)=-x_3$，

两式相减得 $2\ln(3-x_2)-2\ln(3-x_3)=x_3-x_2=(3-x_2)-(3-x_3)$.

令 $3-x_2=t_2$，$3-x_3=t_3$，得 $2\ln t_2-2\ln t_3=t_2-t_3$，则 $2=\dfrac{t_2-t_3}{\ln t_2-\ln t_3}$. ……………… 7 分

令 $u=\dfrac{t_2}{t_3}\in(1,+\infty)$，则 $\dfrac{t_2-t_3}{\ln t_2-\ln t_3}=\dfrac{t_3(u-1)}{\ln u}=2$，

所以 $t_3=\dfrac{2\ln u}{u-1}(u>1)$，可得 $t_2+t_3=\dfrac{2(u+1)\ln u}{u-1}$，$t_2+t_3-4=\dfrac{2\ln u}{u-1}(u+1)-4=$

$\dfrac{2(u+1)\ln u-4(u-1)}{u-1}(u>1)$. ……………………………………………………………… 8 分

设 $g(u)=2(u+1)\ln u-4(u-1)$，则 $g'(u)=2(\ln u+\dfrac{1}{u}-1)$，再设 $h(u)=\ln u+\dfrac{1}{u}-1$，则

$h'(u)=\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{u-1}{u^2}>0$，$h(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(u)>h(1)=0$，即 $g'(u)=$

$2(\ln u+\dfrac{1}{u}-1)>0$，则 $g(u)=2(u+1)\ln u-4(u-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，从而 $g(u)>$

$g(1)=2(1+1)\ln 1-4(1-1)=0$，……………………………………………………………… 10 分

所以 $t_2+t_3-4>0$，即 $(3-x_2)+(3-x_3)-4=2-(x_2+x_3)>0$，所以 $x_2+x_3<2$，

即 $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3<2$. ………………………………………………………………………… 12 分