



4.  $(1+x+x^2)(1-x)^9$ 的展开式中 $x^2$ 的系数为

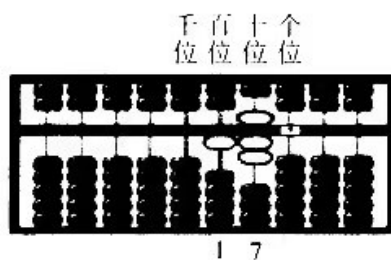
- A. 9  
B. 10  
C. 24  
D. 25

5. 在 $\triangle ABC$ 中,  $A = \frac{\pi}{4}$ ,  $BD \perp AC$ ,  $D$ 为垂足, 若 $AC = 4BD$ , 则 $\cos B =$

- A.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$   
B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
C.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$   
D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 算盘是中国传统的计算工具, 其形长方, 周为木框, 内贯直柱, 俗称“档”, 档中横以梁, 梁上两珠, 每珠作数五, 梁下五珠, 每珠作数一. 算珠梁上部分叫上珠, 梁下部分叫下珠. 例如, 在百位档拨一颗下珠, 十位档拨一颗上珠和两颗下珠, 则表示数字170. 若在全、十、百、千位档中, 先随机选择一档拨一颗上珠, 再随机选择两个档位各拨一颗下珠, 则所拨数字大于200的概率为

- A.  $\frac{1}{2}$   
B.  $\frac{2}{3}$   
C.  $\frac{3}{4}$   
D.  $\frac{5}{6}$



7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x + 5, & x \leq -1, \\ \frac{2(x+1)}{e^x}, & x > -1, \end{cases}$  若函数  $g(x) = [f(x)]^2 - (m+2)f(x) + 2m$  恰有

5个零点, 则实数 $m$ 的取值范围为

- A.  $(-1, 2)$   
B.  $(-1, 0)$   
C.  $(0, \frac{1}{2})$   
D.  $(\frac{1}{2}, 2)$

8. 已知 $f'(x)$ ,  $g'(x)$ 分别为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导函数, 且 $f(x) - g'(x) = 1$ ,  $f(x) + g'(2-x) = 1$ , 若 $g(x)$ 是奇函数, 则下列结论不正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称  
B. 函数 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称  
C.  $g'(0) = 0$   
D.  $f(-3) = 1$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。

9. 已知函数  $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ ，则下列结论正确的是

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$
- B.  $f(x)$  的值域为  $[1, \sqrt{2}]$
- C.  $f(x)$  的图象是轴对称图形
- D.  $f(x)$  的图象是中心对称图形

10. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过点  $F_2$  的直线与双曲线  $C$  的右支

交于  $A, B$  两点，且  $AF_1 \perp AB$ ，则下列结论正确的是

- A. 双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$
- B. 若  $P$  是双曲线  $C$  上的动点，则满足  $|PF_2| = 5$  的点  $P$  共有两个
- C.  $|AF_1| = 2 + \sqrt{14}$
- D.  $\triangle ABF_1$  内切圆的半径为  $\sqrt{14} - 2$

11. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为4， $E$  为侧面  $BCC_1B_1$  的中心， $F$  为棱  $C_1D_1$  的中点， $P$  为线段  $BD_1$  上的动点， $Q$  为上底面  $A_1B_1C_1D_1$  内的动点，则下列结论正确的是

- A. 三棱锥  $P - B_1EF$  的体积为定值
- B. 若  $EP \parallel$  平面  $A_1C_1D_1$ ，则  $EP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- C. 若  $FQ \perp DP$ ，则线段  $FQ$  的最大值为  $2\sqrt{2}$
- D. 当  $DQ$  与  $DA_1$  的所成角为  $45^\circ$  时，点  $Q$  的轨迹为双曲线的一部分

12. 已知函数  $f(x) = xe^x$ ， $g(x) = x \ln x$ ，若直线  $y = b$  与曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  分别相交于点  $A(x_1, f(x_1))$ ， $B(x_2, f(x_2))$ ， $C(x_3, g(x_3))$ ， $D(x_4, g(x_4))$ ，且  $x_1 < x_2$ ， $x_3 < x_4$ ，则下列结论正确的是

- A.  $x_1x_3 = x_2x_4$
- B.  $x_1x_2 = x_3x_4$
- C.  $\ln(x_1x_2) = x_3 + x_4$
- D.  $x_1 + x_2 = \ln(x_3x_4)$

太原市2023年高三年级模拟考试(一)

数学试卷

第II卷(非选择题 共90分)

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, \sqrt{3})$ , 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为\_\_\_\_\_.

14. 已知 $x > 0, y > 0$ ,  $\frac{1}{x} + y = 2$ , 则 $\frac{x}{y}$ 的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F$ , 过点 $F$ 的直线交 $C$ 于 $A, B$ 两个不同点, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3$ ,  $|AF| \cdot |BF| = 6$ , 则直线 $AB$ 的斜率为\_\_\_\_\_.

16. 已知函数 $f(x) = e^{-x} - e^{-2x} + a \sin \pi x$ 有唯一的零点, 则实数 $a$ 的最大值为\_\_\_\_\_.

四、解答题:本大题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 1$ ,  $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 且 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也是等差数列.

(1) 求 $a_n$ ;

(2) 设 $b_n = \frac{S_n}{a_n a_{n+1}} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

18. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a, b, c$ 分别为内角 $A, B, C$ 的对边,点 $D$ 在 $BC$ 上, $BD = 2CD, AD = 2$ .

(1)从下面条件①、②中选择一个条件作为已知,求 $A$ ;

(2)在(1)的条件下,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

条件①: $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin A \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B \sin C + \sin A \right)$ ;

条件②: $\cos^2 A - \cos^2 B + \sin^2 C = \sin B \sin C$ .

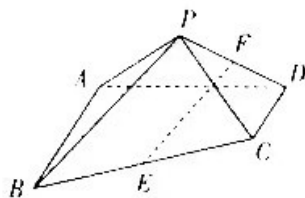
注:若条件①和条件②分别解答,则按第一个解答计分.

19. (本小题满分12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp AD$ ,且 $AB = AD = 2CD = 4, PA = 2, \angle PAB = 60^\circ$ ,  
直线 $PA$ 与平面 $ABCD$ 的所成角为 $30^\circ, E, F$ 分别是 $BC$ 和 $PD$ 的中点.

(1)证明: $EF \parallel$ 平面 $PAB$ ;

(2)求平面 $PAB$ 与平面 $PAD$ 夹角的余弦值.



20. (本小题满分12分)

某制药公司研发一种新药,需要研究某种药物成份的含量  $x$  (单位:mg) 与药效指标值  $y$  (单位:m) 之间的关系,该公司研发部门进行了 20 次试验,统计得到一组数据  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ , 其中  $x_i, y_i$  分别表示第  $i$  次试验中这种药物成份的含量和相应的药效指标值,且  $\sum_{i=1}^{20} x_i = 60, \sum_{i=1}^{20} y_i = 1200, \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 260, \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 81000, \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 4400$ .

(1) 已知该组数据中  $y$  与  $x$  之间具有线性相关关系,求  $y$  关于  $x$  的经验回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ;

(2) 据临床经验,当药效指标值  $y$  在  $[45, 75]$  内时,药品对人体是安全的,求该新药中此药物成份含量  $x$  的取值范围;

(3) 该公司要用 A 与 B 两套设备同时生产该种新药,已知设备 A 的生产效率是设备 B 的 2 倍,设备 A 生产药品的不合格率为 0.009,设备 B 生产药品的不合格率为 0.006,且设备 A 与 B 生产的药品是否合格相互独立

(i) 从该公司生产的新药中随机抽取一件,求所抽药品为不合格品的概率;

(ii) 在该新药产品检验中发现有三件不合格品,求其中至少有两件是设备 A 生产的概率.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. (本小题满分12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 其离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 直线  $AB$  与圆  $x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$  相切.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过点  $M(2, \sqrt{3})$  的直线与椭圆  $C$  相交于  $P, Q$  两个不同点, 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线分别与  $AB, AQ$  相交于点  $D$  和  $N$ , 证明:  $D$  是  $PN$  中点.

22. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - (ax + 1)\ln x$ .

(1) 若  $f(x)$  恰有三个不同的极值点  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 在(1)的条件下, 证明: ①  $x_1 x_2 x_3 = 1$ ; ②  $x_1 + x_2 + x_3 > 3(a - 1)$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线