

数学试题评分参考



一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. A | 2. B | 3. A | 4. D |
| 5. C | 6. D | 7. C | 8. B |

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的给 5 分，部分选对的给 2 分，有选错的给 0 分。

- | | | | |
|-------|---------|---------|---------|
| 9. BD | 10. ABD | 11. ABD | 12. ACD |
|-------|---------|---------|---------|

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

- | | |
|---|------------------|
| 13. 0.5 | 14. $\sqrt{5}-1$ |
| 15. 6, $\frac{47}{15}$ (第一空 2 分, 第二空 3 分) | 16. 5 |

四、解答题：共 70 分。

17. 解：

(1) 由题设得 $AC \perp BD$, $BD = 2\sqrt{3}EC$, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}BD = 3EC$, $AC = 4EC$. 于是

$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 \cdot CP = 4\pi \cdot EC^2 \cdot CP,$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot CP = \frac{4\sqrt{3}}{3}EC^2 \cdot CP.$$

$$\text{所以 } \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}\pi.$$

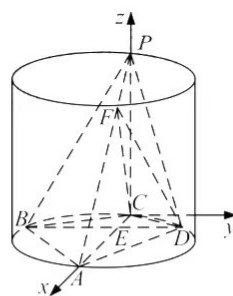
.....4 分

(2) 以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CA}$ 的方向为 x 轴正方向, $|\overrightarrow{CE}|$ 为单位长, 建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$.

由 (1) 和题设得 $\frac{CE}{EA} = \frac{PF}{FA} = \frac{1}{3}$, 所以 $\overrightarrow{CF} = (1, 0, 3)$,

$$\overrightarrow{CD} = (1, \sqrt{3}, 0), \quad \overrightarrow{CP} = (0, 0, 4).$$

设平面 FCD 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CF} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + 3z = 0, \\ x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \vec{n} = (-3, \sqrt{3}, 1).$$

设平面 PCD 的法向量 $\vec{m} = (p, q, r)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CP} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4r = 0, \\ p + \sqrt{3}q = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \vec{m} = (-3, \sqrt{3}, 0). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

因此二面角 $F-CD-P$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. \dots\dots 10 \text{ 分}

18. 解:

(1) 由题设, $f(x)$ 的最小正周期 $T \geq 2 \times (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3}$. 又因为 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$, 所以 $x = \frac{1}{2} \times (\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{7\pi}{12}$ 为 $y = f(x)$ 图像的一条对称轴. \dots\dots 5 \text{ 分}

(2) 由 (1) 知 $T \geq \frac{2\pi}{3}$, 故 $\omega = \frac{2\pi}{T} \leq 3$. 由 $\omega \in \mathbf{N}^*$, 得 $\omega = 1, 2$ 或 3 .

由 $x = \frac{7\pi}{12}$ 为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的对称轴, 所以 $\frac{7\pi}{12}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$.

因为 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ 或 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k_3\pi, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

\dots\dots 8 \text{ 分}

若 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, 则 $\frac{5\pi}{12}\omega = \frac{\pi}{6} + (k_1 - 2k_2)\pi$, 即 $\omega = \frac{2}{5} + \frac{12}{5}(k_1 - 2k_2)$. 不存在整数 k_1, k_2 , 使得 $\omega = 1, 2$ 或 3 .

若 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k_3\pi$, 则 $\frac{5\pi}{12}\omega = -\frac{\pi}{6} + (k_1 - 2k_3)\pi$, 即 $\omega = -\frac{2}{5} + \frac{12}{5}(k_1 - 2k_3)$. 不存在整数 k_1, k_3 , 使得 $\omega = 1$ 或 3 . 当 $k_1 = 2k_3 + 1$ 时, $\omega = 2$.

此时 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_3\pi$, 由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. \dots\dots 12 \text{ 分}

数学试题评分参考第 2 页 (共 5 页)

19. 解:

(1) 由题设可得 $a_2 = a_1 = 1$. 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = T_{n-1} + a_n = 2a_n$, 故 $a_n = 2^{n-2}$. 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2^{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$ 5 分

(2) 设 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}$, 则 $S_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时,

$S_n = 1 + 2 \cdot 2^0 + \cdots + n \cdot 2^{2-n}$. 故 $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + 2 \cdot 2^{-1} + \cdots + n \cdot 2^{1-n}$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{5}{2} + (2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{2-n}) - n \cdot 2^{1-n} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2^{-1}(1-2^{2-n})}{1-2^{-1}} - n \cdot 2^{1-n}. \end{aligned}$$

整理可得 $S_n = 7 - (n+2)2^{2-n}$10 分

故 $S_n < 7$, 又 $S_5 = \frac{49}{8} > 6$. 所以符合题设条件的 m 的最小值为 7.12 分

20. 解:

(1) 依题意 X 服从超几何分布, 且 $N = 5000$, $M = 200$, $n = 500$, 故

$$E(X) = 500 \times \frac{200}{5000} = 20. \quad \text{.....4 分}$$

(2) 当 $N < 685$ 时, $P(X=15) = 0$,

$$\text{当 } N \geq 685 \text{ 时, } P(X=15) = \frac{C_{200}^{15} C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}},$$

$$\text{记 } a(N) = \frac{C_{200}^{15} C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \frac{a(N+1)}{a(N)} &= \frac{C_{N+1-200}^{485} C_N^{500}}{C_{N+1}^{500} C_{N-200}^{485}} \\ &= \frac{(N+1-500)(N+1-200)}{(N+1)(N+1-200-485)} \\ &= \frac{(N-499)(N-199)}{(N+1)(N-684)} \\ &= \frac{N^2 - 698N + 499 \times 199}{N^2 - 683N - 684}. \end{aligned} \quad \text{.....9 分}$$

数学试题评分参考第 3 页 (共 5 页)

由 $N^2 - 698N + 499 \times 199 > N^2 - 683N - 684$ 当且仅当 $N < \frac{499 \times 199 + 684}{15} \approx 6665.7$,

知当 $685 \leq N \leq 6665$ 时, $a(N+1) > a(N)$; 当 $N \geq 6666$ 时, $a(N+1) < a(N)$, 故
 $N = 6666$ 时 $a(N)$ 最大, 所以 N 的估计值为 6666.12 分

21. 解:

(1) 由已知得 $\frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$, $2\sqrt{a^2 + b^2} = 10$, 故 $a = 4$, $b = 3$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$4 分

(2) 设 $E(4\sqrt{2}, t)$, 则 $|t| < 3$, 且 $|t| \neq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $G(x_1, y_1)$, $H(x_2, y_2)$.

直线 $DE: y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{2})$.

由 $\begin{cases} y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{2}), \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$ 得 $(9 - 2t^2)x^2 + 8\sqrt{2}t^2x - 16t^2 - 144 = 0$, 所以

$x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{2}t^2}{2t^2 - 9}$, $x_1x_2 = \frac{16t^2 + 144}{2t^2 - 9}$7 分

$\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{HE} - \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DH} = (2\sqrt{2} - x_1, -y_1) \cdot (4\sqrt{2} - x_2, t - y_2) - (4\sqrt{2} - x_1, t - y_1) \cdot (x_2 - 2\sqrt{2}, y_2)$
 $= 2x_1x_2 + 2y_1y_2 - 6\sqrt{2}(x_1 + x_2) - t(y_1 + y_2) + 32$
 $= (2 + \frac{t^2}{4})x_1x_2 - (\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2 + 6\sqrt{2})(x_1 + x_2) + 4t^2 + 32$
 $= \frac{4(t^2 + 8)(t^2 + 9)}{2t^2 - 9} - \frac{4t^2(3t^2 + 24)}{2t^2 - 9} + 4t^2 + 32$
 $= 0.$

所以 $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DH}$, 即 $\frac{|\overrightarrow{GD}|}{|\overrightarrow{GE}|} = \frac{|\overrightarrow{HD}|}{|\overrightarrow{HE}|}$12 分

数学试题评分参考第 4 页 (共 5 页)

22. 解:

(1) 由题设可知 $a \leq 0$, 有 $h'(x) = 3x^2 + a$, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{a}{3}}$.

当 $a < 0$ 时, $x < -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时, $h(x)$ 单调递增; $-\sqrt{-\frac{a}{3}} < x < \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时, $h(x)$ 单调递减;

$x > \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时, $h(x)$ 单调递增.

当 $b > 0$, $h(x_2) = 0$, 所以 $h(x)$ 有 2 个零点. 当 $b < 0$, $h(x_1) = 0$, 所以 $h(x)$ 有 2 个零点.

当 $a = 0$, 有 $b = 0$, 则 $h(x)$ 有 1 个零点.4 分

(2) 因为 PQ 为 C 在点 P 处的切线, 且 $Q \in C$, 所以 $P \oplus Q = \tilde{P}$,
 $P \oplus (P \oplus Q) = P \oplus \tilde{P}$, 由题设可知 $P \oplus P \oplus Q = 0^*$, $P \oplus P \oplus Q \oplus \tilde{Q} = 0^* \oplus \tilde{Q}$, 所以
 $P \oplus (P \oplus 0^*) = \tilde{Q}$, 故 $P \oplus P = \tilde{Q}$8 分

(3) 直线 PQ 的斜率 $\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, 设 PQ 与 C 的第三个交点为 (x_3, y_3) , 则

$y_3 = \lambda(x_3 - x_1) + y_1$, 代入 $y_3^2 = x_3^3 + ax_3 + b$ 得

$\lambda^2(x_3 - x_1)^2 + 2\lambda y_1(x_3 - x_1) + y_1^2 = x_3^3 + ax_3 + b$, 代入 $y_1^2 = x_1^3 + ax_1 + b$ 得

$x_3^2 + (x_1 - \lambda^2)x_3 + x_1^2 + \lambda^2 x_1 - 2\lambda y_1 + a = 0$, 同理可得

$x_3^2 + (x_2 - \lambda^2)x_3 + x_2^2 + \lambda^2 x_2 - 2\lambda y_2 + a = 0$, 两式相减得 $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$,

因此 $P \oplus Q$ 的坐标为 $((\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2})^2 - x_1 - x_2, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} [x_2 + 2x_1 - (\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2})^2] - y_1)$.

.....12 分

数学试题评分参考第 5 页 (共 5 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线