

2023 年高考 桂林北海 市联合模拟考试 数学参考答案(文科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

$$A=(-\infty, 3), B=(-\infty, -1), \text{则 } A \cap B=(-\infty, -1).$$

2. B 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

$$\text{因为 } iz=1-2i, \text{所以 } z=\frac{1-2i}{i}=-2-i.$$

3. D 【解析】本题考查三角函数,考查直观想象的核心素养.

$$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x, \text{则 } f(x)\text{的最小正周期 } T=2\pi.$$

4. C 【解析】本题考查统计相关知识,考查数据分析的核心素养.

$$\text{估计该校学生的平均达标率为 } \frac{40 \times 60\% + 30 \times 40\% + 30 \times 40\%}{100} \times 100\% = 48\%.$$

5. B 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想.

画出可行域(图略)知,当 $l: z=2x+y-1$ 平移到过点 $(2, 3)$ 时, z 取得最大值,且最大值为 6.

6. C 【解析】本题考查古典概型,考查逻辑推理的核心素养.

这 5 个数中 1, 3, 5 为奇数,从这 5 个数中随机选出 2 个数共有 10 种情况,其中都是奇数的有 3 种情况,则所求的概率为 0.3.

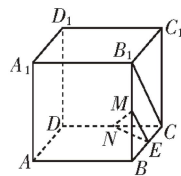
7. C 【解析】本题考查极值,考查数学运算的核心素养.

$$f'(x)=3x^2+a, \text{所以 } f'(1)=3+a=0, \text{则 } a=-3, \text{所以 } f(1)=-2.$$

8. D 【解析】本题考查异面直线所成的角,考查空间想象能力.

取 BC 的中点 E , 连接 ME, NE , 易知 $ME \parallel B_1C$, 所以 $\angle NME$ 或其补角为异面直线 MN 和 B_1C 所成的角. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 则

$$ME=\sqrt{2}, NE=\sqrt{2}, MN=\sqrt{6}, \text{所以 } |\cos \angle NME| = \left| \frac{2+6-2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



9. B 【解析】本题考查比较大小,考查逻辑推理的核心素养.

$$\text{由题意知, } a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}, b=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}, c=\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2}, \text{故 } c < b < a.$$

10. A 【解析】本题考查圆锥的外接球,考查直观想象的核心素养.

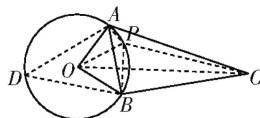
设球 O 的半径为 R , 则 $4\pi R^2=16\pi$, 解得 $R=2$. 设圆锥底面圆的半径为 r , 则 $r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, 圆锥的高为 3, 圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$, 所以该圆锥的侧面积为 $\pi \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3}=6\pi$.

11. D 【解析】本题考查函数的零点以及导数的应用,考查数形结合的数学思想.

令 $f(x)=0$, 可得 $|\ln x|=k(x-1)$, 当 $k>0$ 且 $y=\ln x$ 和 $y=k(x-1)$ 在 $x=1$ 处相切时, $k=1$, 当 $k<0$ 且 $y=-\ln x$ 和 $y=k(x-1)$ 在 $x=1$ 处相切时, $k=-1$, 结合 $y=|\ln x|$ 和 $y=k(x-1)$ 的图象(图略), 可知当函数 $f(x)=|\ln x|-k(x-1)$ 恰有两个零点时, k 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

12. B 【解析】本题考查解三角形的实际应用, 考查逻辑推理的核心素养.

如图, 因为 $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$, 所以 P 在如图所示的圆 O 上,



圆 O 的半径为 $\frac{1}{2} \times \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10$,

由圆周角的性质可得 $\angle ADB = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3}$, $\angle OBA = \angle OAB = \frac{\pi}{6}$,

连接 OC , 可得 $OP + CP > OC$, 所以当 P 为 OC 与圆的交点时, CP 取最小值, 即 $CP = OC - OP$,

又 $OB = OP = 10$, 在 $\triangle OBC$ 中, $OB = 10$, $BC = 40$, $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$, 根据余弦定理可知 $OC =$

$\sqrt{10^2 + 40^2 - 2 \times 10 \times 40 \times (-\frac{1}{2})} = 10\sqrt{21}$, 所以 CP 的最小值为 $(10\sqrt{21} - 10)$ m.

13. -2 【解析】本题考查平面向量, 考查数学运算的核心素养.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times (-1) + (-2) \times 0 = -2$.

14. (2, 0) 【解析】本题考查抛物线, 考查直观想象的核心素养.

因为 $2p = 2 + 6$, 所以 $p = 4$, 则所求焦点坐标为 $(2, 0)$.

15. $-\frac{\pi}{6}$ 【解析】本题考查三角恒等变换, 考查数学运算的核心素养.

因为 $f(x) = \sin(4x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$) 的图象关于点 $(\frac{\pi}{24}, 0)$ 对称, 所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 所

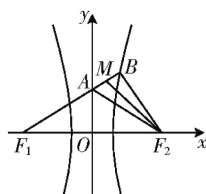
以 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

16. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 【解析】本题考查双曲线, 考查直观想象的核心素养.

如图, 由题可知 $|AF_1| = |AF_2| = |BF_2|$, 又因为 $|BF_1| - |BF_2| = 2a$, 所以

$|AB| = 2a$, 因为直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $|AO| = \frac{c}{2}$, $|AF_1| = \frac{\sqrt{5}c}{2}$, 设 M 为

AB 的中点, 连接 MF_2 , 易知 $\triangle AOF_1 \approx \triangle F_2MF_1$, 所以 $\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|} = \frac{|F_1M|}{|F_1O|}$,



则 $\frac{2c}{\frac{\sqrt{5}c}{2}} = \frac{a + \frac{\sqrt{5}}{2}c}{c}$, 解得 $a = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$, 所以双曲线 C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

17. 解:(1)由所给数据,可得 2×2 列联表为

	近视	未近视	合计
小学生	80	100	180
中学生	120	100	220
合计	200	200	400

..... 6分

(2)根据 2×2 列联表中的数据可得

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{400 \times (80 \times 100 - 120 \times 100)^2}{180 \times 220 \times 200 \times 200} \approx 4.04 < 6.635, \dots 10分$$

根据临界值表可知,没有 99%的把握认为该地区的学生是否近视与学生的年级有关.

..... 12分

18. 解:(1)由题可知,等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_1} = 2$ 2分

又 $a_1 + a_2 = 6$, 所以 $a_1 + 2a_1 = 6$, 解得 $a_1 = 3$ 4分

所以 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2^n$ 6分

(2) $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2$, 9分

令 $S_n \leq 14$, 解得 $n \leq 3$, 所以使得 $S_n \leq 14$ 成立的正整数 n 的最大值为 3. 12分

19. (1)证明:因为 $\angle BDC = 60^\circ$, $BD = 2CD = 2$, 所以由余弦定理可得 $BC = \sqrt{3}$, 1分

所以 $BD^2 = CD^2 + BC^2$, 则 $BC \perp CD$ 2分

因为平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, 且相交于 CD , 所以 $BC \perp$ 平面 PCD 4分

因为 $PD \subset$ 平面 PCD , 所以 $BC \perp PD$ 6分

(2)解:因为 $PC \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$, 8分

在 $\triangle PBD$ 中, $PD = 2$, $BD = 2$, $PB = \sqrt{6}$, $S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 10分

设点 A 到平面 PBD 的距离为 h , 所以 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{2} h = 1$, 解得 $h = \frac{2\sqrt{15}}{5}$, 即点 A 到平面 PBD

的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ 12分

20. 解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(x-a)(x-2a)}{x}$ 1分

若 $a > 0$, 当 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (a, 2a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 4分

若 $a < 0$, 则 $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 单调递增.

综上,当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a), (2a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 2a)$;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间. 6 分

(2) 因为 $f(x)$ 有 3 个零点, 所以 $a > 0$, 8 分

则 $f(a) > 0, f(2a) < 0$, 10 分

解得 $e^{\frac{5}{4}} < a < \frac{e^2}{2}$, 即 a 的取值范围为 $(e^{\frac{5}{4}}, \frac{e^2}{2})$ 12 分

21. 解: (1) 由 $|FM| = 3|FN|$, 可得 $a + c = 3(a - c)$, 解得 $a = 2c$, 1 分

又因为 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $b = \sqrt{3}c$, 2 分

因为点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$, 3 分

解得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$, 所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 当直线 l 不与 x 轴重合时, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $x = my + 1$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my + 1, \end{cases} \text{整理得} (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

则 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$, 5 分

$$\text{故} |AB| = \sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2]} = \sqrt{(1+m^2)[(\frac{-6m}{3m^2+4})^2 + \frac{36}{3m^2+4}]} = 12 \times \frac{m^2+1}{3m^2+4}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

圆心 O 到直线 l 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, 则 $\frac{|CD|^2}{4} = 4 - \frac{1}{m^2+1}$, 9 分

$$\text{所以} \frac{\lambda}{|AB|} + \frac{|CD|^2}{4} = \frac{\lambda}{12} \times \frac{3m^2+4}{m^2+1} + 4 - \frac{1}{m^2+1} = \frac{\lambda}{12} \times (3 + \frac{1}{m^2+1}) + 4 - \frac{1}{m^2+1} = \frac{\lambda}{4} + 4 +$$

$\frac{\frac{\lambda}{12} - 1}{m^2+1}$, 当 $\lambda = 12$ 时, $\frac{12}{|AB|} + \frac{|CD|^2}{4}$ 为定值 7. 11 分

当 l 与 x 轴重合时, $|AB| = |CD| = 4$, 所以 $\frac{12}{|AB|} + \frac{|CD|^2}{4} = 7$, 所以当 $\lambda = 12$ 时, $\frac{\lambda}{|AB|} + \frac{|CD|^2}{4}$ 为常数. 12 分

22. 解: (1) 圆 M 的普通方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 2$, 展开得 $x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$ 2 分

$$\text{由} \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, \\ x = \rho \cos \theta, \end{cases} \text{得圆} M \text{的极坐标方程为} \rho^2 - 6\rho \cos \theta + 7 = 0. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) 把 $\theta = \alpha$ 代入 $\rho^2 - 6\rho \cos \theta + 7 = 0$, 得 $\rho^2 - 6\rho \cos \alpha + 7 = 0$,

则 $|OA|, |OB|$ 是 $\rho^2 - 6\rho\cos\alpha + 7 = 0$ 的两个根,

所以 $|OA| + |OB| = 6\cos\alpha, |OA||OB| = 7, \dots\dots\dots 6$ 分

则 $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{|OA| + |OB|}{|OA||OB|} = \frac{6\cos\alpha}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$, 解得 $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\dots\dots\dots 8$ 分

所以 $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{3}$,

所以 $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 即直线 AB 的直角坐标方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$. $\dots\dots\dots 10$ 分

23. 解: (1) 因为 $f(x) < 3 + |2x+2|$, 所以 $|2x-1| + |2x+2| < 3 + |2x+2|$, 即 $|2x-1| < 3, \dots\dots\dots 2$ 分

所以 $-3 < 2x-1 < 3$, 则 $-1 < x < 2$, 所以不等式的解集为 $(-1, 2)$. $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) 由 $|2x-1| + |2x+2| \geq |2x-1 - (2x+2)| = 3$, 得 $M=3$, $\dots\dots\dots 6$ 分
则 $a^2 + 2b^2 = 3$,

由柯西不等式可知 $(a^2 + 2b^2)(4 + \frac{1}{2}) \geq (2a+b)^2$, $\dots\dots\dots 8$ 分

则 $3 \times \frac{9}{2} \geq (2a+b)^2$, 解得 $2a+b \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 当且仅当 $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}, b = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, 等号成立,

所以 $2a+b$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. $\dots\dots\dots 10$ 分

自主选拔在线
高中数学竞赛辅导资料

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

