绝密★考试结束前

高三数学学科 试题

考生须知：

1. 本试题卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1，S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

选择题部分

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{x}>1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\sqrt{x}\geq\frac{1}{2}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x\left|\frac{1}{4}\leq x<1\right.\right\}$　　B. $\left\{x\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x<1\right.\right\}$　　C. $\{x|x<1\}$　　D. $\varnothing$

2. 若 $(1-2\mathrm{i})z=2\mathrm{i}^3$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{12}{25}$　　D. $\frac{16}{25}$

3. $\left(\frac{1}{x}+x\right)\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项为（　　）

A. 280　　B. -280　　C. 160　　D. -160

4. “省刻度尺”问题由英国数学游戏大师杜登尼提出：一根 $23cm$ 长的尺子，要能够量出长度为 $1cm$ 到 $23cm$ 且边长为整数的物体，至少需要 6 个刻度（尺子头尾不用刻）. 现有一根 $8cm$ 的尺子，要能够量出长度为 $1cm$ 到 $8cm$ 且边长为整数的物体，尺子上至少需要有（　　）个刻度

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. 班级举行知识竞猜闯关活动，设置了 A、B、C 三个问题. 答题者可自行决定答三题顺序. 甲有 60% 的可能答对问题 A，80% 的可能答对问题 B，50% 的可能答对问题 C. 记答题者连续答对两题的概率为 p，要使得 p 最大，他应该先回答（　　）

A. 问题 A　　B. 问题 B

C. 问题 A、B 和 C 都可以　　D. 问题 C

6. 在平面直角坐标系上，圆 $C:x^2+(y-1)^2=1$，直线 $y=a(x+1)$ 与圆 C 交于 A,B 两点，$a\in(0,1)$ 则当 $\triangle ABC$ 的面积最大时，$a=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

7. 设 $a=1.1$，$b=e^{0.1}$，$c=\dfrac{10}{9}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $b>a>c$　　D. $c>b>a$

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 α 经过点 B、D，平面 β 经过点 A、D_1，当平面 α、β 分别截正方体所得截面面积最大时，平面 α、β 所成的锐二面角大小为（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 在平面直角坐标系中，已知点 $O(0,0)$，$\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(3,1)$，则（　　）

A. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$

B. $\triangle AOB$ 是直角三角形

C. $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的投影向量的坐标为 $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$

D. 与 $\overrightarrow{OB}$ 垂直的单位向量的坐标为 $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ 或 $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10},-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x$，$x\in(0,\pi)$，则（　　）

A. $f(x)$ 有一个零点　　B. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 有两个极值点　　D. 若 $f(x_1)=f(x_2)=a$，则 $x_1+x_2<\pi$

11. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$E(0,b)$，$A(m,n)$ 为椭圆 E 上一点，$m\neq0$，点 B、A 关于 x 轴对称，直线 EA,EB 分别与 x 轴交于 M,N 两点，则（　　）

A. $|AE|$ 的最大值为 $\sqrt{a^2+b^2}$

B. 直线 EA,EB 的斜率乘积为定值

C. 若 y 轴上存在点 P，使得 $\angle MPO=\angle PNO$，则 P 的坐标为 $(0,a)$ 或 $(0,-a)$

D. 直线 AN 过定点

12. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x^3+y^3=x-y$，则（　　）

A. $x+y\geq\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}-1$　　B. $x+y\leq\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

C. $x^2+y^2<1$　　D. $x^2+y^2>\dfrac{1}{2}$

非选择题部分

三．填空题（本题共4个小题，每小题5分，共20分.）

13．已知随机变量X服从正态分布$N\left(1,\sigma^2\right)$，若$P\left(X>a\right)=P\left(X<a\right)$，则$a=$________.

14．写出一个满足下列条件的正弦型函数，$f\left(x\right)=$________.

①最小正周期为π；　　②$f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增；　　③$\forall x\in\mathbf{R}$，$\left|f\left(x\right)\right|\le 2$成立.

15．将两个形状完全相同的正三棱锥底面重合得到一个六面体，若六面体存在外接球，且正三棱锥的体积为1，则六面体外接球的体积为________.

16．已知椭圆E:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，椭圆的左右焦点分别为F_1,F_2，点$A(m,n)$为椭圆上一点且$m>0,n>0$，过A作椭圆E的切线l，并分别交$x=2$、$x=-2$于C、D点.连接CF_1、DF_2，CF_1与DF_2交于点E，并连接AE.若直线l,AE的斜率之和为$\frac{3}{2}$，则点A坐标为________.

四.解答题（本题共6个小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本题10分）已知数列$\{a_n\}$是以d为公差的等差数列，$d\ne 0$，S_n为$\{a_n\}$的前n项和

（1）若$S_6-S_3=6$，$a_3=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{a_n\}$中的部分项组成的数列$\{a_{m_n}\}$是以a_1为首项，4为公比的等比数列，且$a_2=4a_1$，求数列$\{m_n\}$的前n项和T_n.

18.（本题12分）已知$\triangle ABC$中角A,B,C对应的边分别是a,b,c，

已知$\left(1-\sin C\right)\left(1-\cos 2B\right)=\sin 2B\cos C$，$a=2c=2$.

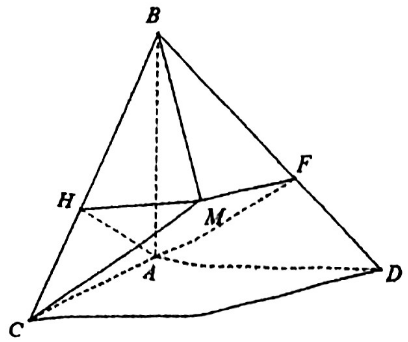
（1）证明：$C=2B-\frac{\pi}{2}$；

（2）求$\triangle ABC$的面积.

19.（本题12分）如图，四面体$ABCD$中，$\angle BAD=\angle BAC=\angle CAD=90^\circ$，$AC=AD$，$AB$与面$BCD$的所成角为$45^\circ$.

（1）若四面体$ABCD$的体积为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，求AC的长；

（2）设点M在面BCD中，$\angle ABM=45^\circ$，$\angle ACM=30^\circ$，过M作CD的平行线，分别交BC、BD于点H、F，求面AFH与面ACD所成夹角的余弦值.



第19题图

20．（本题 12 分）大坝是一座具有灌溉、防洪、发电、航运、养殖和游览等综合效益的大型水利枢纽工程. 为预测渗压值和控制库水位，工程师在水库选取一支编号为 $BS3$ 的渗压计，随机收集 10 个该渗压计管内水位和水库水位监测数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
水库水位 x_i/m	75.69	75.74	75.77	75.78	75.81	75.85	75.67	75.87	75.9	75.93	758.01
$BS3$ 渗压计管内水位 y_i/m	72.88	72.90	72.92	72.92	72.93	72.94	72.94	72.95	72.96	72.98	729.32

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 57457.98$，$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 53190.77$，$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 55283.20$

（1）估计该水库中 $BS3$ 号渗压计管内平均水位与水库的平均水位；

（2）求该水库 $BS3$ 号渗压计管内水位与水库水位的样本相关系数（精确到 0.01）；

（3）某天雨后工程师测量了水库水位，并得到水库的水位为 $76m$. 利用以上数据给出此时 $BS3$ 号渗压计管内水位的估计值.

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{240.6} \approx 15.51$，$\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

$\bar{y} = \hat{b}\bar{x} + \hat{a}$

21．（本题 12 分）设双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的右焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$，右焦点到双曲线的渐近线的距离为 1.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）若 $A(-2,1), B(2,1)$，点 C 在线段 AB 上（不含端点），过点 C 分别作双曲线两支的切线，切点分别为 P, Q. 连接 PQ，并过 PQ 的中点 F 分别作双曲线两支的切线，切点分别为 D, E，求 $\triangle DEF$ 面积的最小值.

22．（本题 12 分）已知 $f(x) = ae^x - ae^{-x} - 2x$

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 单调区间；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）设 $m>n$，$m, n \in \mathbf{N}^*$，证明：$\ln\dfrac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k} < \dfrac{m-n}{2mn}$.