2021 级高二下学期期末校际联合考试

数学试题答案

2023.07

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-4 DCAB　　5-8ABBD

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.BD　　10.ACD　　11.AC　　12.ACD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{4}{3}$　　14. 4　　15. 2　　16. 520

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

【解析】（1）由 $(x+1)(x-5)\le 0$，可得 $-1\le x\le 5$，即 $A=[-1,5]$. ……2 分

当 $m=3$ 时，$B=[-2,4]$，所以 $A\cap B=[-1,4]$ ……4 分

（2）由题意知 p：$-1\le x\le 5$，q：$1-m\le x\le 1+m$，

因为 p 是 q 的充分条件，故 $[-1,5]\subseteq[1-m,1+m]$，……6 分

故 $\begin{cases}1-m<1+m\\1-m\le -1\\1+m\ge 5\end{cases}$，得 $m\ge 4$，……9 分

故实数 m 的取值范围为 $[4,+\infty)$ ……10 分

18.（12 分）

【解析】（1）设公比为 q，由 $a_4=8a_1$，得 $a_1q^3=8a_1$，解得 $q=2$ ……2 分

由 $S_6=63$，得 $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=63$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$ ……6 分

（2）由（1）得 $b_n=1+2\log_2 a_n=1+2\log_2 2^{n-1}=2n-1$ ……8 分

则 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，

由 $b_7+b_8+b_9+\cdots+b_{k+7}=133$，得 $(2\times7-1)(k+1)+\frac{(k+1)k}{2}\times 2=133$，

整理，得 $k^2+14k-120=0$，……10 分

解得 $k=6$ 或 $k=-20$（舍去），

故 $k=6$ ……12 分

19.（12 分）

【解析】（1）由题意，函数 $f(x)$ 是偶函数，可得 $f(x)=f(-x)$ 恒成立，

所以 $\log_4(4^x+1)+kx=\log_4(4^{-x}+1)-kx$，即 $\log_4\dfrac{4^x+1}{4^{-x}+1}=-2kx$，

所以 $\log_4 4^x=-2kx$，所以 $x=-2kx$， ……4 分

即 $(1+2x)x=0$ 对一切 $x\in R$ 恒成立，

可得 $1+2k=0$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$. ……6 分

（2）由方程 $f(x)-2=m$ 有解，即方程 $m+2=f(x)$ 有解，

又 $m+2=f(x)=\log_4(4^x+1)-\dfrac{1}{2}x=\log_4\dfrac{4^x+1}{2^x}=\log_4(2^x+\dfrac{1}{2^x})$ ， ……9 分

因为 $2^x>0$，所以 $2^x+\dfrac{1}{2^x}\geq 2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，即 $2^x+\dfrac{1}{2^x}\in[2,+\infty)$，

所以 $m+2\geq\log_4 2=\dfrac{1}{2}$，即 $m\geq-\dfrac{3}{2}$.

故要使方程 $f(x)-2=m$ 有解，实数 m 的取值范围为 $[-\dfrac{3}{2},+\infty)$. ……12 分

20.（12 分）

【解析】（1）因为 $a_{n+1}^2-a_{n+1}a_n-2a_n^2=0(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$. ……2 分

因为 $\{a_n\}$ 的各项均为正，

所以 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}=2a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列， ……4 分

因为 $a_1a_2a_3=64$，$a_2^3=64$，$a_2=4$，又公比为 2，

所以 $a_1=2$，所以 $a_n=2^n$ ……6 分

（2）构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)<f(0)=0$，所以 $\ln(1+x)-x<0$， ……8 分

设 $C_n=1+\dfrac{n}{a_n}$，所以 $\ln C_n=\ln(1+\dfrac{n}{a_n})=\ln(1+\dfrac{n}{2^n})<\dfrac{n}{2^n}$，

所以 $\ln T_n<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$ ……10 分

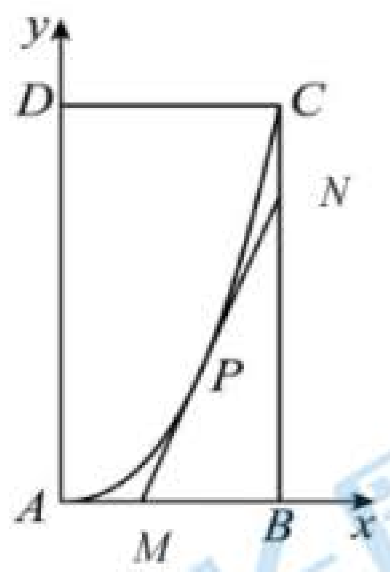
记 $A_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，则 $\frac{1}{2}A_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，

所以 $A_n-\frac{1}{2}A_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}<1$，

所以 $A_n<2$，所以 $\ln T_n<2$，所以 $T_n<e^2<9$ ……………………………………………………12 分

21．（12 分）

【解析】（1）如图建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},4)$，$D(0,4)$



由题意，设抛物线解析式为 $y=ax^2$，

代入点 $C(\sqrt{2},4)$，可得 $a=2$，

故抛物线为 $y=2x^2$，……………………………………………………………………2 分

由题意直线 MN 为抛物线的切线，

点 P 到边 AD 的距离为 $t(0<t<\sqrt{2})$，故切点 P 坐标为 $(t,2t^2)$，

$y'=4x$，故直线 MN 的斜率为 $4t$，

故直线 MN 的方程为：$y-2t^2=4t(x-t)$，即 $y=4tx-2t^2$，……………………………4 分

令 $y=0$，得 $x=\frac{t}{2}$，故 $M(\frac{t}{2},0)$，

令 $x=\sqrt{2}$，得 $y=4\sqrt{2}t-2t^2$，故 $N(\sqrt{2},4\sqrt{2}t-2t^2)$，

$S=\frac{1}{2}|MN|\cdot|BN|=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}-\frac{t}{2})\times(4\sqrt{2}t-2t^2)=\frac{1}{2}t^3-2\sqrt{2}t^2+4t$，

故 $S=\frac{1}{2}t^3-2\sqrt{2}t^2+4t(0<t<\sqrt{2})$. ……………………………………………6 分

（2）因为 $S=\frac{1}{2}t^3-2\sqrt{2}t^2+4t(0<t<\sqrt{2})$，

所以 $S'=\frac{3}{2}t^2-4\sqrt{2}t+4=\frac{1}{2}(t-2\sqrt{2})(3t-2\sqrt{2})$. ……………………………………8 分

因为 $0<t<\sqrt{2}$，所以 $t-2\sqrt{2}<0$，

所以当 $0<t<\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$S'>0$；当 $\frac{2\sqrt{2}}{3}<t<\sqrt{2}$ 时，$S'<0$，

所以函数 $S=\frac{1}{2}t^3-2\sqrt{2}t^2+4t$ 在 $(0,\frac{2\sqrt{2}}{3})$ 上单调递增，

在 $(\frac{2\sqrt{2}}{3},\sqrt{2})$ 单上调递减，…………………………………………………………10 分

所以 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times(\frac{2\sqrt{2}}{3})^3-2\sqrt{2}\times(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2+4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{32\sqrt{2}}{27}<2$，

所以不存在点 P，使隔离出来的 ΔBMN 的面积 S 超过 2 平方千米. ……………12 分

齐鲁家长圈 微信号：sdgkjzq

22．（12 分）

【解析】(1)由题意得 $f'(x)=\ln x+1$，$x>0$，$f(e^{-4})=-4e^{-4}$

所以 $f'(e^{-4})=-3$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=e^{-4}$ 处的切线方程是 $y-(-4e^{-4})=-3(x-e^{-4})$

即 $y=-3x-e^{-4}$. ……………………………………………………………………………3 分

(2)令 $g(x)=f(x)-\lambda(x-1)=x\ln x-\lambda(x-1)$，$x>0$，则 $g'(x)=\ln x+1-\lambda$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,e^{\lambda-1})$ 上单调递减，在 $(e^{\lambda-1},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g_{\min}(x)=g(e^{\lambda-1})=\lambda-e^{\lambda-1}\geq 0$ ……………………………………………………5 分

令 $h(x)=x-e^{x-1}$，则 $h'(x)=1-e^{x-1}$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h_{\max}(x)=h(1)=0$，

因而当且仅当 $\lambda=1$ 时成立，

所以 $\lambda=1$. ……………………………………………………………………………7 分

(3)先证 $f(x)\geq -3x-e^{-4}$.

构造 $m(x)=f(x)+3x+e^{-4}$，则 $m'(x)=f'(x)+3=\ln x+4$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,e^{-4})$ 上单调递减，在 $(e^{-4},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m(x)\geq m(e^{-4})=0$ ……………………………………………………………………9 分

设直线 $y=-3x-e^{-4}$，$y=x-1$ 分别与 $y=a$ 交于 (x_1',a)，(x_2',a)，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $a=-3x_1'-e^{-4}=f(x_1)\geq -3x_1-e^{-4}$，从而 $x_1'\leq x_1$，

当且仅当 $a=-4e^{-4}$ 时取等号，

由(2)知，$f(x)\geq x-1$，则 $a=x_2'-1=f(x_2)\geq x_2-1$，从而 $x_2'\geq x_2$

当且仅当 $a=0$ 时取等号，

所以 $|x_1-x_2|=x_2-x_1<x_2'-x_1'=(a+1)-(\frac{-e^{-4}-a}{3})=\frac{4a}{3}+1+\frac{1}{3e^4}$，

因为等号成立的条件不能同时取得，所以 $|x_1-x_2|<\frac{4a}{3}+1+\frac{1}{3e^4}$. ……………………12 分