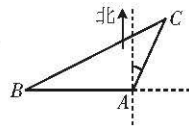


## 高一质量监测联合调考 数学参考答案

1. A 因为  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BA} = (-1, 2) - (3, 3) = (-4, -1)$ , 所以点  $B$  的坐标为  $(-4, -1)$ .
2. B  $z-1=a^2-1+(a+1)i$  为纯虚数, 所以  $\begin{cases} a^2-1=0, \\ a+1 \neq 0, \end{cases}$  解得  $a=1$ , 所以  $z=1+2i$ , 即  $\bar{z}=1-2i$ .
3. D 由余弦定理得  $a^2=b^2+c^2-2bccos A=3$ , 得  $a=\sqrt{3}$ .
4. C 若  $m \parallel n, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel \alpha$  或  $m \subset \alpha$ , A 错误; 平行于同一平面的两条直线可能平行, 可能异面, 也可能相交, B 错误; 若  $n \subset \alpha, m \perp n$ , 则  $m$  与  $\alpha$  不一定垂直, D 错误.
5. B 据图可得该几何体的侧面是等边三角形或正方形, A 正确; 该几何体恰有 14 个面, B 不正确; 该几何体恰有 24 条棱, C 正确; 该几何体恰有 12 个顶点, D 正确.
6. A 如图,  $\angle BAC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ , 由正弦定理得  $\frac{4\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \angle BAC}$ , 解得  $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 因为  $0 < C < 90^\circ$ , 所以  $C = 45^\circ$ , 因为  $90^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ , 所以乙船航行的最佳方向为西偏南  $15^\circ$ .
7. D 由余弦定理可得  $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD$ , 解得  $BD = \sqrt{2}$ . 所以  $BD^2 + BC^2 = CD^2$ , 在  $\triangle ACD$  中,  $AC = \sqrt{6}, AD = \sqrt{6}, CD = 2$ , 则  $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6-1} = \sqrt{5}$ , 设点  $B$  到平面  $ACD$  的距离为  $h$ , 由  $V_{A-BCD} = V_{B-ACD}$ , 可得  $\frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{3} \times h \times \sqrt{5}$ , 解得  $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即点  $B$  到平面  $ACD$  的距离为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .
8. C 因为动点  $P$  满足  $|PC|=1$ , 所以点  $P$  的轨迹是以  $C$  为圆心, 1 为半径的圆, 设  $D$  为  $AB$  的中点, 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{PD}^2 - \overrightarrow{DB}^2 = \overrightarrow{PD}^2 - 1 \geq 3 - 2\sqrt{3}$ .
9. AD 因为  $a \perp b$ , 所以  $a \cdot b = -6 + \lambda^2 + \lambda = 0$ , 解得  $\lambda = -3$  或  $2$ .
10. AC 设  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ , 则  $\bar{z} = a - bi$ , 因为  $z + 2\bar{z} = 3a - bi = 1 + i$ , 所以  $a = \frac{1}{3}, b = -1$ , A 正确, B 错误.  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \frac{10}{9}, 5z + \bar{z} = 2 - 4i$ , C 正确, D 错误.
11. AD 若  $BD_1 \perp MC$ , 则  $BD_1$  在平面  $BB_1C_1C$  上的投影在  $BC_1$  上, 则  $BC_1 \perp MC$ , 所以点  $M$  的轨迹为  $B_1C$ , 所以点  $M$  的轨迹长度为  $3\sqrt{2}$ , 将平面  $AB_1C$  翻折到与平面  $BB_1C$  重合, 此时  $A, M, B$  三点共线,  $AM + BM$  取得最小值, 最小值为  $\frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$ , 故选 AD.
12. BCD 如图 1, 过  $C'$  作  $C'Q' \perp O'A'$  交  $O'A'$  于  $Q'$ , 作  $C'E' \parallel O'y'$  交  $O'A'$  于  $E'$ ,



则  $O'Q' = 4$ ,  $C'Q' = \sqrt{20-16} = 2$ ,  $C'E' = \sqrt{2}C'Q' = 2\sqrt{2}$ ,  $O'E' = 2$ , 画出原图, 如图 2 所示, 以点  $O$  为坐标原点建立平面直角坐标系.

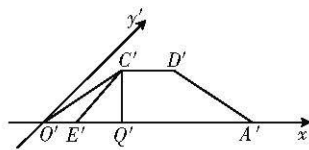


图 1

$CE = 4\sqrt{2}$ ,  $OA = 11$ ,  $CD = 3$ ,  $OC = \sqrt{4+32} = 6$ , 四边形  $AOCD$  的面积为  $\frac{(3+11) \times 4\sqrt{2}}{2} = 28\sqrt{2}$ , A 错误, B 正确.  $O(0, 0)$ ,  $A(11, 0)$ ,  $D(5, 4\sqrt{2})$ , 则  $\vec{AO} = (-11, 0)$ ,  $\vec{AD} = (-6, 4\sqrt{2})$ ,  $\vec{AD}$  在  $\vec{AO}$  上的投影向量为  $\frac{\vec{AD} \cdot \vec{AO}}{|\vec{AO}|^2} \cdot \vec{AO} = \frac{6}{11}\vec{AO}$ , C 正确.

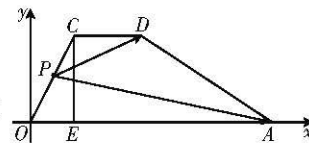


图 2

设  $P(x, y)$ ,  $x \in [0, 2]$ , 因为  $\frac{y}{x} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ , 所以  $P(x, 2\sqrt{2}x)$ ,  $x \in [0, 2]$ ,

则  $\vec{PA} = (11-x, -2\sqrt{2}x)$ ,  $\vec{PD} = (5-x, 4\sqrt{2}-2\sqrt{2}x)$ , 则  $\vec{PA} - 2\vec{PD} = (x+1, 2\sqrt{2}x-8\sqrt{2})$ ,  $|\vec{PA} - 2\vec{PD}| = \sqrt{(x+1)^2 + 8(x-4)^2} = \sqrt{9x^2 - 62x + 129}$ , 因为函数  $f(x) = 9x^2 - 62x + 129$  在  $[0, 2]$  上单调递减, 所以当  $x=2$  时,  $|\vec{PA} - 2\vec{PD}| = \sqrt{41}$ , 当  $x=0$  时,  $|\vec{PA} - 2\vec{PD}| = \sqrt{129}$ , 所以  $|\vec{PA} - 2\vec{PD}|$  的取值范围为  $[\sqrt{41}, \sqrt{129}]$ , D 正确.

13.  $\pi$   $|z+i| \leq 1$  的解集是以  $(0, -1)$  为圆心, 1 为半径的圆及其内部所有点组成的集合, 其面积  $S = \pi \times 1^2 = \pi$ .

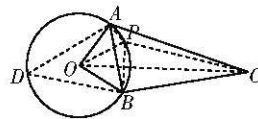
14. 3 连接  $FC$  (图略). 因为  $\vec{AC} = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AF} + 2\vec{AB}$ , 所以  $x+y=3$ .

15.  $12\pi$  取  $O$  为  $CD$  的中点 (图略), 则  $PO \perp CD$ , 因为平面  $PCD \perp$  平面  $ABCD$  且相交于  $CD$ ,

所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ , 则  $\angle PBO$  为  $PB$  与平面  $ABCD$  所成的角, 即  $\tan \angle PBO = \frac{PO}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

解得  $OC = \sqrt{2}$ ,  $DC = 2\sqrt{2}$ . 易知  $BC \perp$  平面  $PCD$ , 且  $PC \perp PD$ , 所以四棱锥  $P-ABCD$  外接球的球心为矩形  $ABCD$  的中心, 四棱锥  $P-ABCD$  外接球的半径  $R = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ , 即四棱锥  $P-ABCD$  外接球的表面积为  $12\pi$ .

16.  $10\sqrt{21}-10$  如图, 因为  $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $P$  在如图所示的圆  $O$  上,



圆  $O$  的半径为  $\frac{1}{2} \times \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10$ ,

由圆周角的性质可得  $\angle ADB = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\angle OBA = \angle OAB = \frac{\pi}{6}$ ,

连接  $OC$ , 可得  $OP + CP > OC$ , 所以当  $P$  为  $OC$  与圆的交点时,  $CP$  取最小值, 即  $CP = OC - OP$ , 又  $OB = OP = 10$ , 在  $\triangle OBC$  中,  $OB = 10$ ,  $BC = 40$ ,  $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$ , 根据余弦定理可知  $OC =$

$\sqrt{10^2 + 40^2 - 2 \times 10 \times 40 \times (-\frac{1}{2})} = 10\sqrt{21}$ , 所以  $CP$  的最小值为  $(10\sqrt{21} - 10)$  m.

17. 解: (1) 设  $a = (x, y)$ , 所以  $x^2 + y^2 = 4$ , ..... 1 分  
 因为  $a \parallel b$ , 所以  $x - y = 0$ , ..... 2 分  
 解得  $\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ , ..... 4 分  
 所以  $a = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  或  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ . ..... 5 分  
 (2) 由题可知  $\frac{a \cdot b}{b^2} b = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , ..... 7 分  
 所以  $\frac{a \cdot b}{b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ..... 8 分  
 设向量  $a, b$  的夹角为  $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ , 所以  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , ..... 9 分  
 即向量  $a, b$  的夹角大小为  $\frac{\pi}{3}$ . ..... 10 分

18. 解: (1) 由题可知  $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -1 + i$ , ..... 2 分  
 因为  $z_1 - z_2 = 1 + 2i - (-1 + i) = 2 + i$ , ..... 3 分  
 所以  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ . ..... 5 分  
 (2) 因为  $z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(-1 + i) = -1 - 2i + i - 2 = -3 - i$ , ..... 7 分  
 所以复数  $z_1 \cdot z_2$  的虚部为  $-1$ , 设  $z = -1 + mi, m \in \mathbf{R}, m \neq 0$ , ..... 8 分  
 所以  $2(-1 + mi)^2 + a(-1 + mi) + 10 = 0$ , ..... 9 分  
 整理得  $12 - 2m^2 - a + (am - 4m)i = 0$ , ..... 10 分  
 所以  $\begin{cases} 12 - 2m^2 - a = 0, \\ am - 4m = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} m = +2, \\ a = 4, \end{cases}$  ..... 11 分  
 所以实数  $a$  的值为  $4, z = -1 + 2i$ . ..... 12 分

19. (1) 解: 连接  $AC, A_1C_1$ , 取  $O, O_1$  分别为  $AC$  和  $A_1C_1$  的中点.

因为  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  为正四棱台, 所以  $A_1C_1 \parallel AC$ , 且  $OO_1$  为  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的高. .... 2 分

因为  $A_1B_1 = 1, AB = AA_1 = 3$ , 所以  $OO_1 = \sqrt{7}$ , ..... 3 分

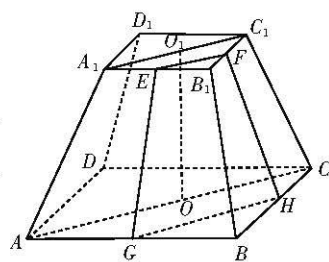
所以正四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的体积为  $\frac{1}{3} \times \sqrt{7} \times (1^2 + 3^2 +$

$\sqrt{1^2 \times 3^2}) = \frac{13\sqrt{7}}{3}$ . ..... 6 分.

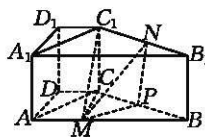
(2) 证明: 因为  $E, F, G, H$  分别为棱  $A_1B_1, B_1C_1, AB, BC$  的中点, 所以  $EF \parallel A_1C_1, GH \parallel AC$ , ..... 7 分

所以  $EF \parallel GH$ , 所以  $EFHG$  为梯形, 则  $EG$  与  $FH$  必相交. .... 8 分

设  $EG \cap FH = P$ , 因为  $EG \subset$  平面  $AA_1B_1B$ , 所以  $P \in$  平面  $AA_1B_1B$ , ..... 9 分



- 因为  $FH \subset \text{平面 } BB_1C_1C$ , 所以  $P \in \text{平面 } BB_1C_1C$ , ..... 10 分
- 又平面  $AA_1B_1B \cap \text{平面 } BB_1C_1C = BB_1$ , 所以  $P \in BB_1$ , ..... 11 分
- 则  $GE, FH, BB_1$  交于一点. .... 12 分
20. 解: (1) 由  $\cos(A-B) = \sqrt{3} \sin B - \cos C$ , 可得  $\cos(A-B) = \sqrt{3} \sin B + \cos(A+B)$ , ... 1 分
- 所以  $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B + \cos A \cos B - \sin A \sin B$ , ..... 2 分
- 即  $2 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B$ , ..... 3 分
- 则  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ..... 4 分
- 所以  $A = \frac{\pi}{3}$  或  $A = \frac{2\pi}{3}$ . .... 5 分
- (2) 因为  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 所以  $A = \frac{\pi}{3}$ , ..... 6 分
- 由正弦定理  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ , 得  $a + c = \frac{2(\sin A + \sin C)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3} + 2\sin(\frac{2\pi}{3} - B)}{\sin B} =$
- $\frac{\sqrt{3}(1 + \cos B)}{\sin B} + 1 = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\cos^2 \frac{B}{2}}{2\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{\tan \frac{B}{2}} + 1$ . .... 8 分
- 因为  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 所以  $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$  所以  $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{\pi}{12} < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{4}$ , 所以  $2$
- $-\sqrt{3} < \tan \frac{B}{2} < 1$ , ..... 10 分
- 所以  $\sqrt{3} + 1 < a + c < 4 + 2\sqrt{3}$ , 则  $\triangle ABC$  周长的取值范围为  $(3 + \sqrt{3}, 6 + 2\sqrt{3})$ . .... 12 分
21. (1) 证明: 因为  $AM = 1$ , 所以  $AM = CD$ ,  $AM \parallel CD$ , 又  $AB \perp AD$ , 所以四边形  $ADCM$  为矩形, 即  $DC \perp CM$ . .... 2 分
- 由题可知  $CC_1 \perp \text{平面 } ABCD$ , 所以  $CC_1 \perp CM$ , ..... 3 分
- 又  $CC_1 \cap DC = C$ , 所以  $CM \perp \text{平面 } DCC_1D_1$ , ..... 4 分
- 因为  $CM \subset \text{平面 } MCC_1$ , 所以平面  $MCC_1 \perp \text{平面 } DCC_1D_1$ . .... 5 分
- (2) 解: 作  $MP \parallel AC$ , 交  $BC$  于点  $P$ , 连接  $NP$ , 则  $BP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
- 因为  $MP \not\subset \text{平面 } ACC_1A_1$ ,  $AC \subset \text{平面 } ACC_1A_1$ , 所以  $MP \parallel \text{平面 } ACC_1A_1$ , ..... 6 分
- 因为  $MN \parallel \text{平面 } ACC_1A_1$ , ..... 7 分
- 又  $MN \cap MP = M$ , 所以平面  $MNP \parallel \text{平面 } ACC_1A_1$ . .... 8 分
- 平面  $BCC_1B_1$  和平面  $MNP$ , 平面  $ACC_1A_1$  的交线分别为  $NP$  和  $CC_1$ , 所以  $NP \parallel CC_1$ .



因为  $BP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 所以  $B_1N = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . ..... 10 分

四面体  $MNBB_1$  的体积为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ . ..... 12 分

22. 解: 设  $\angle BCD = \alpha$ ,  $\angle ADC = \theta$ , 则  $\angle CAD = 2\alpha$ ,  $\angle BDC = \pi - \theta$ ,  
 $\angle ABC = \theta - \alpha$ .

(1) 因为  $AD = 1$ ,  $BC = 2$ , 所以  $BC = AB = 2$ , ..... 1 分

所以  $\angle BCA = \angle CAB = 2\alpha$ , 所以  $\angle ACD = 2\alpha - \alpha = \alpha$ , ..... 2 分

所以  $\angle BCD = \angle ACD$ , 又  $CD$  为  $\triangle ABC$  中  $AB$  边上的中线, 所以  $AC = BC$ , ..... 3 分

则  $\triangle ABC$  为正三角形, 所以  $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3}$ . ..... 4 分

(2) 依题意可得  $CD = \sqrt{2}$ , 设  $AC = x$ ,  $BC = y$ , 由余弦定理得  $\cos \theta = \frac{3 - x^2}{2\sqrt{2}} = -\frac{3 - y^2}{2\sqrt{2}}$ , ..... 6 分

整理得  $x^2 + y^2 = 6$ , 即  $AC^2 + BC^2 = 6$ . ..... 7 分

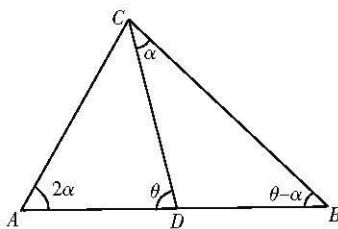
由正弦定理得  $\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin(\pi - \theta)}$ ,  $\frac{CD}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \theta}$ , ..... 8 分

即  $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin \theta}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{x}{\sin \theta}$ , 整理得  $y = \sqrt{2}x \cos \alpha$ , ..... 9 分

则  $x^2 + y^2 = (1 + 2\cos^2 \alpha)x^2 = (\cos 2\alpha + 2)x^2 = 6$ , 则  $\cos 2\alpha = \frac{6}{x^2} - 2$ . ..... 10 分

由余弦定理得  $\cos 2\alpha = \frac{1 + x^2 - 2}{2x}$ , 则  $\frac{1 + x^2 - 2}{2x} = \frac{6}{x^2} - 2$ , ..... 11 分

整理得  $x^3 + 4x^2 - x = 12$ , 即  $AC^3 + 4AC^2 - AC = 12$ . ..... 12 分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线