**2024届新高三开学摸底考试卷（全国通用）**



**理科数学**

本试卷共22题（含选考题）.全卷满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1．答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2．回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目

1．已知全集,,则（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】由题设,故,,,,

所以,故选A.

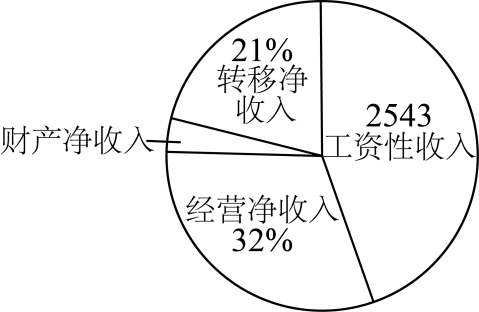
2．复数在复平面上对应的点位于虚轴上,则实数*a*的值为（    ）

A．1 B．2 C． D．

【答案】B

【解析】,因为复数*z*对应点在虚轴上,所以,解得.故选B.

3．已知2022年第1季度农村居民人均消费支出为4391元,为本季度农村居民人均可支配收入的76%,本季度农村居民人均可支配收入的来源及其占比的统计数据的饼状图如图所示,根据饼状图,则下列结论正确的是（    ）



A．财产净收入占农村居民人均可支配收入的4%

B．工资性收入占农村居民人均可支配收入的40%

C．经营净收入比转移净收入大约多659元

D．财产净收入约为173元

【答案】D

【解析】由题知,农村居民人均可支配收入为,工资性收入占农村居民人均可支配收入的,财产净收入占农村居民人均可支配收入的百分比为,故错、B错；经营净收入与转移净收入差为元,故错误；财产净收入为元,故D正确.故选D.

4．已知是平面内两个非零向量,那么“”是“存在,使得”的（    ）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】C

【详解】若,则存在唯一的实数,使得,故,而,存在使得成立,所以“”是“存在,使得”的充分条件,若且,则与方向相同,故此时,所以“”是“存在,使得”的必要条件,故“”是“存在,使得”的充要条件,故选C.

5．已知,则的近似值为（    ）

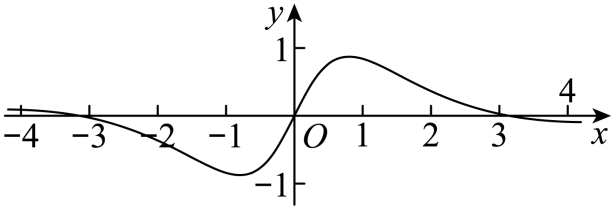
A． B． C． D．

【答案】B

【解析】因为,所以,所以

.故选B.

6．某个函数的大致图象如图所示,则该函数可能是（    ）



A． B．

C． D．

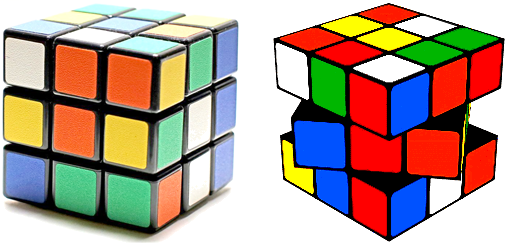
【答案】B

【解析】4个选项中的函数定义域均为R,设该函数为,对于A, ,故为奇函数,且,对于B, 故为奇函数,,对于C, ,故为偶函数,

对于D,故为奇函数,,

由图知函数为奇函数,故排除C；由,排除A,由,排除D,故选B．

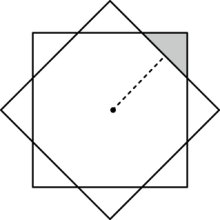
7．在2023年3月12日马来西亚吉隆坡举行的Yong Jun KL Speedcubing比赛半决赛中,来自中国的9岁魔方天才王艺衡以4.69秒的成绩打破了“解三阶魔方平均用时最短”吉尼斯世界纪录称号.如图,一个三阶魔方由27个单位正方体组成,把魔方的中间一层转动了之后,表面积增加了（    ）



A．54 B． C． D．

【答案】C

【解析】如图,转动了后,此时魔方相对原来魔方多出了16个小三角形的面积,显然小三角形为等腰直角三角形,设直角边,则斜边为,则有,得到,由几何关系得：阴影部分的面积为,所以增加的面积为.故选C.



8．设是椭圆的上顶点,是上的一个动点．当运动到下顶点时,取得最大值,则的离心率的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】设,,因为,,所以,,由题意知当时,取得最大值,所以,可得,即,则．故选B*．*

9．瑞士著名数学家欧拉在1765年证明了定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一条直线上,这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”.在平面直角坐标系中作,,点,点,且其“欧拉线”与圆相切.则圆上的点到直线的距离的最小值为（    ）

A． B． C． D．6

【答案】A

【解析】点D为BC中点,在中,,所以边上的高线、垂直平分线和中线合一,则的“欧拉线”为,因为点,点,所以,因为直线的斜率为,所以*AD*斜率为,方程为,即,因为“欧拉线”与圆相切

所以圆心到“欧拉线”的距离为,圆心到直线的距离为,所以圆上的点到直线的距离的最小值为,故选A.

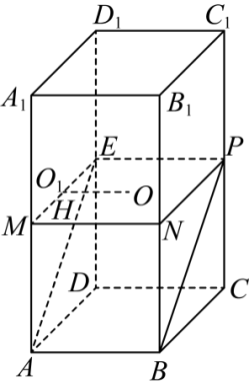
10.已知直四棱柱的底面为正方形,,为的中点,过三点作平面,则该四棱柱的外接球被平面截得的截面圆的周长为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】由题意知直四棱柱的外接球的半径,如图,取的中点,连接,易知四边形为矩形,且平面即为平面,分别取的中点,连接,则易得四边形为正方形,由四棱柱的对称性可知,其外接球的球心即为正方形的中心,取的中点,连接,则平面,平面,所以平面,故球心到平面的距离与到平面的距离相等,过点作,垂足为,

易知面,面,故,又平面,所以平面,又,所以球心到平面的距离为,由球的性质知,截面圆的半径,所以截面圆的周长为.故选D.



11.若直线与曲线相切,直线与曲线相切,则的值为（    ）

A． B．1 C．e D．

【答案】B

【解析】设直线与曲线相切于点,直线与曲线相切于点,则,且,所以,,且,所以,

令,,当时,,单调递减,当时,,单调递增,且,,所以当时,,因为,,即,所以,所以,故,故选B.

12．已知函数与的定义域均为,为偶函数,且,,则下面判断错误的是(    )

A．的图象关于点中心对称

B．与均为周期为4的周期函数

C．

D．

【答案】C

【解析】因为为偶函数,所以①,所以的图象关于直线轴对称,

因为等价于②,又③,②+③得④,即,即,所以,故的周期为4,又,所以的周期也为4,故选项B正确,①代入④得,故的图象关于点中心对称,且,故选项正确,由,可得,且,故,故,因为与值不确定,故选项错误,因为,所以,

所以,故,故,所以选项D正确,故选.

1. 填空题：本题共4小题,每小题5分,共20分.

13．的展开式中的系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】-15

【解析】,令得,所以的系数为.

14．某高校鼓励学生深入当地农村拍摄宣传片,带动当地旅游业的发展,帮助当地居民提升经济收入.若统计发现在某一时段内,200部宣传片的浏览量*X*（万次）服从正态分布,则该时段内这200部宣传片中浏览量在万次的个数约为\_\_\_\_\_\_.

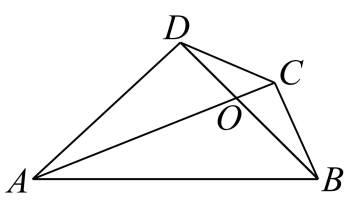
（参考数据：,）

【答案】164

【解析】因为浏览量*X*（万次）服从正态分布,所以浏览量*X*（万次）的均值,方差,,故,,

故.故浏览量在万次的作品个数约为.

15．如图,四边形中,与相交于点*O*,平分,,,则的值\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】

【解析】在中,,由余弦定理得

,

所以.由正弦定理得,

.即.

又因为平分,所以.

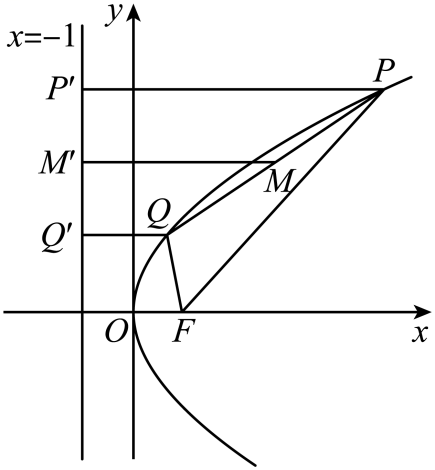
16．已知抛物线的焦点为*F*,点在抛物线上,且满足,设弦的中点*M*到*y*轴的距离为*d*,则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】1

【解析】由抛物线可得准线方程为,设,由余弦定理可得,

由抛物线定义可得*P*到准线的距离等于,*Q*到准线的距离等于,

*M*为的中点,由梯形的中位线定理可得*M*到准线的距离为,



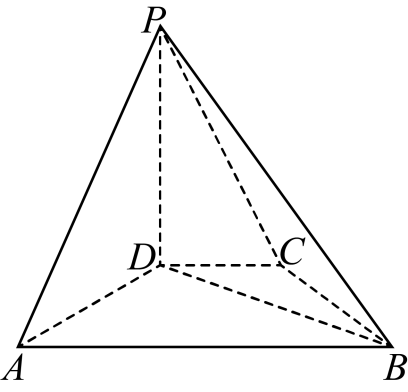
则弦的中点*M*到*y*轴的距离,故,

又,则,当且仅当时,等号成立,所以的最小值为1.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17．（12分）．如图,四棱锥中,底面*ABCD*为等腰梯形,,,且平面平面*ABCD*,.



(1)求证：；

(2)与平面所成的角为,求二面角的正弦值.

【解析】（1）证明：取*AB*的中点,连接,则由题意知为正三角形,

所以,

由等腰梯形知,设,则,,

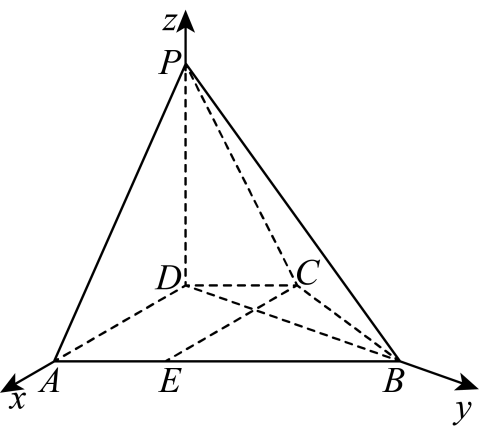
故,即得,所以,

因为平面平面,,平面平面,平面*PAD*,

所以平面,又平面,所以,

因为,,平面,所以平面,

因为平面,所以.



（2）由（1）得,,两两垂直,以为坐标原点,,,所在直线分别为,,轴建立空间直角坐标系,

因为平面,所以平面所成的角为,

设,则,,

则,,,,

则,,,

设平面*PAB*的法向量为,

则,即   ,

取,则,

设平面*PBC*的法向量为,

则,即,

取,则,

所以,

所以二面角的正弦值为.

18.（12分）设正项数列的前项和为,且.

(1)求数列的通项公式；

(2)能否从中选出以为首项,以原次序组成的等比数列.若能,请找出公比最小的一组,写出此等比数列的通项公式,并求出数列的前项和；若不能,请说明理由.

【解析】（1）,

当时,,即,

得或（舍去）.

由,……①

得,……②

得：,

化简得.

因为,所以,,

即数列是以4为首项,2为公差的等差数列,

所以.

（2）存在.

当,时,

会得到数列中原次序的一列等比数列,

此时的公比,是最小的,此时该等比数列的项均为偶数,均在数列中；

下面证明此时的公比最小：

,假若取,公比为,

则为奇数,不可能在数列中.

所以.

又,所以,即的通项公式为,

故.

19.（12分）人工智能（AI）是一门极富挑战性的科学,自诞生以来,理论和技术日益成熟.某公司成立了两个研究性小组,分别设计和开发不同的AI软件用于识别音乐的类别.记两个研究性小组的软件每次能正确识别音乐类别的概率分别为.为测试软件的识别能力,计划采取两种测试方案.

方案一：将100首音乐随机分配给两个小组识别,每首音乐只被一个软件识别一次,并记录结果；

方案二：对同一首歌,两组分别识别两次,如果识别的正确次数之和不少于三次,则称该次测试通过.

(1)若方案一的测试结果如下：正确识别的音乐数之和占总数的；在正确识别的音乐数中,组占；在错误识别的音乐数中,组占.

（i）请根据以上数据填写下面的列联表,并通过独立性检验分析,是否有的把握认为识别音乐是否正确与两种软件类型有关？

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 正确识别 | 错误识别 | 合计 |
| *A*组软件 |  |  |  |
| *B*组软件 |  |  |  |
| 合计 |  |  | 100 |

（ii）利用（i）中的数据,视频率为概率,求方案二在一次测试中获得通过的概率；

(2)研究性小组为了验证软件的有效性,需多次执行方案二,假设,问该测试至少要进行多少次,才能使通过次数的期望值为16？并求此时的值.

附：,其中.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

【解析】（1）（i）依题意得列联表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 正确识别 | 错误识别 | 合计 |
| 组软件 | 40 | 20 | 60 |
| 组软件 | 20 | 20 | 40 |
| 合计 | 60 | 40 | 100 |

因为,

且,

所以没有的把握认为软件类型和是否正确识别有关；

（ii）由（i）得,

故方案二在一次测试中通过的概率为

；

（2）方案二每次测试通过的概率为



,

所以当时,取到到最大值,

又,此时,

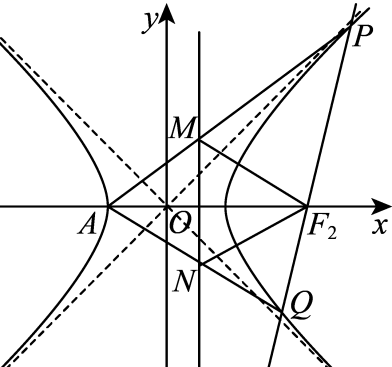
因为每次测试都是独立事件,

故次实验测试通过的次数,期望值,

因为,所以

所以测试至少27次,此时.

20.（12分）已知双曲线的左、右焦点分别为,,*A*是的左顶点,的离心率为2．设过的直线交的右支于、两点,其中在第一象限．



(1)求的标准方程；

(2)若直线、分别交直线于、两点,证明：为定值；

(3)是否存在常数,使得恒成立？若存在,求出的值；否则,说明理由．

【解析】（1）由题可得,故可得,则,

故的标准方程为.

（2）由（1）中所求可得点*A*,的坐标分别为,

又双曲线渐近线为,显然直线的斜率不为零,

故设其方程为,,

联立双曲线方程可得：,

设点的坐标分别为,

则,

,

；

又直线方程为：,令,则,

故点的坐标为；

直线方程为：,令,则,

故点的坐标为；

则





故为定值.

（3）当直线斜率不存在时,

对曲线,令,解得,

故点的坐标为,此时,

在三角形中,,故可得,

则存在常数,使得成立；

当直线斜率存在时,

不妨设点的坐标为,,直线的倾斜角为,直线的倾斜角为,

则,,

假设存在常数,使得成立,即,

则一定有,也即；

又；；

又点的坐标满足,则,

故



；

故假设成立,存在实数常数,使得成立；

综上所述,存在常数,使得恒成立.

21.（12分）已知函数,其中.

(1)讨论函数的单调性；

(2)若函数存在三个零点（其中）.

（i）若,函数,证明：；

（ii）若,证明：.

【解析】（1）函数的定义域为.

①若时,

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  |  |
|  | - | 0 | + | 0 | - |
|  |  | 极小值 |  | 极大值 |  |

②若时,恒成立,单调递减,

③若时

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 |  |
|  | - | 0 | + | 0 | - |
|  |  | 极小值 |  | 极大值 |  |

④若时,时,单调递减；时,单调递增.

综上所述,当时,单调递减,单调递增,单调递减；当时,单调递减；当时,单调递减,,单调递增,单调递减；当时,单调递减,单调递增.

（2）（i）由（1）知当时,单调递减,

单调递增,单调递减.

所以存在三个零点,只需和即可,

所以且,

整理得且.

此时,,

令,易知在上单调递减

有,

所以.

（ii）由（1）知,当时,单调递减,

单调递增,

单调递减

所以.若存在三个零点,只需和即可,

所以且,

整理得,

因为,

设,则方程,即为

记,

则为方程三个不同的根,

设.

要证：,

即证：,

即证：,

而且,

所以,

所以,

即证：,

即证：,

即证：,

记,

则,

所以在为增函数,所以

所以,

设,

则,

所以在上是增函数,

所以

所以,

即

所以若,则.

（二）选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系*xOy*中,曲线的方程为．曲线的参数方程为（为参数）．以坐标原点为极点,*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求曲线和曲线的极坐标方程；

(2)若射线（,）交曲线于点*P*,直线与曲线和曲线分别交于点*M*、*N*,且点*P*、*M*、*N*均异于点*O*,求面积的最大值．

【解析】（1）把,代入,

得曲线的极坐标方程为,即．

将中的参数消去,得曲线的普通方程为,

把,代入,得曲线的极坐标方程为,即．

（2）由题得,,,

,

因为,所以

,

其中,,

当,即时,的面积取得最大值．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知函数的最小值为*m*,的最小值为*n*．实数*a*,*b*,*c*满足,,,．

(1)求*m*和*n*；

(2)证明：．

【解析】（1）函数的最小值为,此时,

当时,,

当时,,

当时,,

函数,

函数在上单调递减,在上单调递增,

当时,,

所以函数的最小值为,

故.

（2）由（1）知,,

因为,,

所以,,,,,

又因为,

所以,又,

所以,所以．所以．