邯郸市2023届高三年级第二次模拟试题

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	B	B	B	C	A

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BD	ABD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. -5　　14. $2\sqrt{2}+3$　　15. 37　50　　16. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】（1）选择条件①$2a=b+2c\cos B$.

由余弦定理得$2a=b+2c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b+\frac{a^2+c^2-b^2}{a}$，

整理得$a^2+b^2-c^2=ab$，所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

选择条件②$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=2\sqrt{3}a\cos C$.

可得$a\sin A\cos B+b\sin A\cos A=\sqrt{3}a\cos C$.

由正弦定理得，$\sin^2 A\cos B+\sin A\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C$，

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sqrt{3}\cos C$，得$\sin(A+B)=\sqrt{3}\cos C$.

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin C=\sqrt{3}\cos C$，$\tan C=\sqrt{3}$，

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

选择条件③$\sqrt{3}\sin C=3-2\cos^2\frac{C}{2}$.

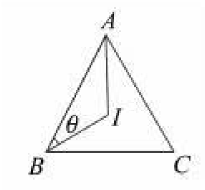
因为$\sqrt{3}\sin C=3-\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)-1=2-\cos C$，

即$\sqrt{3}\sin C+\cos C=2$，所以$\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

又$C\in(0,\pi)$，所以$C+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以$C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$C=\frac{\pi}{3}$.

（2）因为$C=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle ABC+\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，

因为$\angle BAC$与$\angle ABC$的平分线交于点I，所以$\angle ABI+\angle BAI=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle AIB=\frac{2\pi}{3}$，



设$\angle ABI=\theta$，则$\angle BAI=\frac{\pi}{3}-\theta$，且$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle ABI$中，由正弦定理得，$\frac{BI}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{AI}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin\angle AIB}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$，

所以$BI=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，$AI=4\sin\theta$，

所以$\triangle ABI$的周长为$2\sqrt{3}+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+4\sin\theta$

$=2\sqrt{3}+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+4\sin\theta=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}$，

因为$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，

所以当$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$\triangle ABI$的周长取得最大值，最大值为$4+2\sqrt{3}$.

故$\triangle ABI$周长的最大值为$4+2\sqrt{3}$.

18.【解题指导】（1）根据$S_n^2=a_n^{n+1}$，可得$S_{n+1}^2=a_{n+1}^{n+2}$，两式相除可得$a_{n+1}^n=a_n^{n+1}$，两边取对数可得$\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}$，

结合$n=2$时求得$a_2=9$，可得$\frac{\lg a_2}{2}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg 3$，可得$\left\{\frac{\lg a_n}{n}\right\}$是常数列，即可求得答案.

（2）由（1）的结论可得$b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}$的解析式，从而求得T_n，结合放缩法以及等比数列的前n项和公式确定T_n的范围.

【解析】（1）由题意知S_n为正项数列$\{a_n\}$的前n项的乘积，$S_n=\sqrt{a_n^{n+1}}$，可得$S_n^2=a_n^{n+1}$，$S_{n+1}^2=a_{n+1}^{n+2}$，两式相除得$a_{n+1}^n=a_n^{n+1}$，所以$\lg a_{n+1}^n=\lg a_n^{n+1}$，即$n\lg a_{n+1}=(n+1)\lg a_n$，所以$\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}$，

当$n=2$时，$S_2^2=(a_1a_2)^2=a_2^3$，所以$(3a_2)^2=a_2^3$，解得$a_2=9$，

所以$\frac{\lg a_2}{2}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg 3$，结合$\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}$，可知数列$\left\{\frac{\lg a_n}{n}\right\}$是常数列，

所以$\frac{\lg a_n}{n}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg 3$，所以$\lg a_n=n\lg 3=\lg 3^n$，所以$a_n=3^n$.

（2）由（1）可得$b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{3^n-1}{3^n+1}=1-\frac{2}{3^n+1}$，

则$T_n=\left(1-\frac{2}{3^1+1}\right)+\left(1-\frac{2}{3^2+1}\right)+\cdots+\left(1-\frac{2}{3^n+1}\right)=n-2\left(\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\right)$，

由于$\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$，

故$T_n=n-2\left(\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\right)>n-1$，且$T_n<n$，所以$n-1<T_n<n$，即$T_n\in(n-1,n)$.

19.【解析】（1）由题意可得关于对员工敬业精神和员工管理水平评价的2×2列联表

项目	对员工管理水平满意	对员工管理水平不满意	合计
对员工敬业精神满意	50	30	80
对员工敬业精神不满意	40	80	120
合计	90	110	200

零假设为H_0：对员工敬业精神满意与对员工管理水平满意无关.

据表中数据计算得：$\chi^2=\frac{200\times(50\times 80-30\times 40)^2}{80\times 120\times 90\times 110}\approx 16.498>6.635=x_{0.01}$，

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为对员工敬业精神满意与对员工管理水平满意有关联.

（2）对员工敬业精神和对员工管理水平都满意的概率为$\frac{1}{4}$，随机变量X的所有可能取值为0，1，2，3.

其中$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$；$P(X=1)=C_3^1\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$；

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$，$P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$，

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

则 $E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$.

（3）$T(B|A)=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}=\dfrac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}}=\dfrac{P(AB)}{P(A\overline{B})}=\dfrac{n(AB)}{n(A\overline{B})}=\dfrac{80}{30}=\dfrac{8}{3}$，

所以估计 $T(B|A)$ 的值为 $\frac{8}{3}$.

20.【命题立意】本题考查空间点、直线与平面的位置关系等知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合思想；体现应用性、创新性、综合性，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】方法一：（1）因为 $BC\perp$ 平面 PAB，$PE\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PE$.

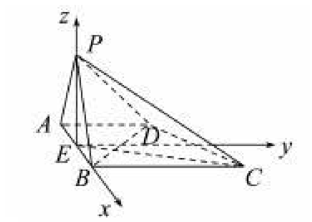
因为 $PE\perp EC$，$EC\cap BC=C$，所以 $PE\perp$ 平面 BCD，又 $BD\subset$ 平面 BCD，所以 $PE\perp BD$.

又因为 $\tan\angle ABD=\tan\angle BCE=\frac{1}{2}$，所以 $\angle ABD=\angle BCE$，$\angle ABD+\angle CEB=90°$，即 $BD\perp CE$.

因为 $PE\cap CE=E$，所以 $BD\perp$ 平面 PEC.

（2）由（1）得 $PE\perp AB$，E 为 AB 的中点，所以 $PB=PA=AB=2$.

以 E 为坐标原点，EB，EP 所在直线分别为 x 轴，z 轴，过点 E 作 BC 的平行线为 y 轴，建立空间直角坐标系 $Exyz$，



则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(1,2,0)$，$D(-1,1,0)$，$B(1,0,0)$，

$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(-1,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=(0,0,-\sqrt{3})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=0$，$\overrightarrow{PD}\cdot\vec{m}=0$ 得 $\begin{cases}x+2y-\sqrt{3}z=0\\-x+y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=-2$，$z=-\sqrt{3}$，即 $\vec{m}=(1,-2,-\sqrt{3})$.

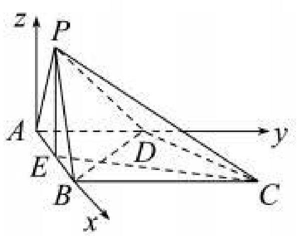
由（1）知平面 PCE 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，

所以 $\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\vec{m}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

根据观察，二面角 $E-PC-D$ 为锐二面角，所以二面角 $E-PC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

方法二：

（1）依题意得 $AD\perp$ 平面 PAB，以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.



设 $\angle PAB=\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(1,0,0)$，$P(2\cos\theta,0,2\sin\theta)$，

$\overrightarrow{PE}=(1-2\cos\theta,0,-2\sin\theta)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,0)$.

因为 $PE\perp EC$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{CE}=2\cos\theta-1=0$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $P(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=(0,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(-1,1,-\sqrt{3})$.

设平面 PEC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=0$，$\overrightarrow{PE}\cdot\vec{m}=0$，得 $\begin{cases}x+2y-\sqrt{3}z=0\\-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $x=-2$，即 $\vec{m}=(-2,1,0)$.

由 $\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)=\vec{m}$，所以 $BD\perp$ 平面 PEC.

（2）设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$.

由 $\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}=0$，得 $\begin{cases}a+2b-\sqrt{3}c=0\\-a+b-\sqrt{3}c=0\end{cases}$，

令 $a=-1$，则 $b=2$，$c=\sqrt{3}$，即 $\vec{n}=(-1,2,\sqrt{3})$.

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

所以二面角 $E-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.【解析】(1)根据双曲线的对称性可知 $P_3\left(-2\sqrt{10},3\right)$，$P_4\left(2\sqrt{10},3\right)$ 关于 y 轴对称，所以 P_3，P_4 必同时在双曲线上，而 $P_2\left(0,4\right)$ 不可能在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上.

则双曲线还经过点 $P_1\left(2,0\right)$，则 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

将点 $P_3\left(-2\sqrt{10},3\right)$ 代入，可得 $b^2=1$.

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2)(i)当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2-4y^2=4\end{cases}$，整理得，$\left(1-4k^2\right)x^2-8kmx-4m^2-4=0$.

由 $\begin{cases}1-4k^2\neq 0\\\Delta=\left(-8km\right)^2-4\left(1-4k^2\right)\left(-4m^2-4\right)>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}1-4k^2\neq 0\\1-4k^2+m^2>0\end{cases}$ (*)，

且 $x_1+x_2=\frac{8km}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-4m^2-4}{1-4k^2}$，

因为 $P_1\left(2,0\right)$，所以 $\overrightarrow{P_1A}=\left(x_1-2,y_1\right)$，$\overrightarrow{P_1B}=\left(x_2-2,y_2\right)$，

因为 $P_1A\perp P_1B$，所以 $\overrightarrow{P_1A}\cdot\overrightarrow{P_1B}=0$，即 $\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)+y_1y_2=0$，

所以 $x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4+\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=0$，即 $\left(1+k^2\right)x_1x_2+\left(km-2\right)\left(x_1+x_2\right)+4+m^2=0$，

所以 $\left(1+k^2\right)\frac{-4m^2-4}{1-4k^2}+\left(km-2\right)\frac{8km}{1-4k^2}+4+m^2=0$，

化简，得 $3m^2+16km+20k^2=0$，即 $\left(3m+10k\right)\left(m+2k\right)=0$，

所以 $m=-\frac{10}{3}k$ 或 $m=-2k$，且均满足(*)，

当 $m=-2k$ 时，直线 l 的方程为 $y=k\left(x-2\right)$，直线 l 过定点 $\left(2,0\right)$，即点 P_1，不符合题意，舍去；

当 $m=-\frac{10}{3}k$ 时，直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\frac{10}{3}\right)$，直线 l 过定点 $\left(\frac{10}{3},0\right)$，符合题意.

（ii）当直线l的斜率不存在时，设l的方程为$x=n\left(|n|>2\right)$，

由$\begin{cases}x=n\\x^2-4y^2=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_A=x_B=n\\y_A^2=y_B^2=\dfrac{n^2}{4}-1\end{cases}$，

依题意，因为$P_1A\perp P_1B$，$P_1\left(2,0\right)$，所以$|y_A|=|n-2|$，即$y_A^2=\left(n-2\right)^2$，

所以$\dfrac{n^2}{4}-1=n^2-4n+4$，即$3n^2-16n+20=0$，

解得$n=2$（舍）或$n=\dfrac{10}{3}$，

所以直线l的方程为$x=\dfrac{10}{3}$，直线l过点$\left(\dfrac{10}{3},0\right)$，

综上所述，直线l经过一个不在双曲线C上的定点，定点的坐标为$\left(\dfrac{10}{3},0\right)$.

22.【解析】（1）由$f\left(x\right)=\left(\ln x+1\right)x-mx^2+m$得，$f'\left(x\right)=\ln x-2mx+2\left(x>0\right)$，

因为$f\left(x\right)$单调递减，所以$f'\left(x\right)=\ln x-2mx+2\leqslant 0$在$x>0$时恒成立，即$2m\geqslant\dfrac{\ln x+2}{x}$，

令$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x+2}{x}\left(x>0\right)$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{-\ln x-1}{x^2}$，可知$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增；

$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减，则$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时$g\left(x\right)$取最大值$g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}$，所以$2m\geqslant\mathrm{e}$，$m\geqslant\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，

所以m的取值范围是$\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2},+\infty\right)$.

（2）因为$f'\left(x\right)=\ln x-2mx+2\left(x>0\right)$有两个零点$a$，$b$，

令$\varphi\left(x\right)=f'\left(x\right)=\ln x-2mx+2\left(x>0\right)$，则$\varphi'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-2m$，

当$m\leqslant 0$时，$\varphi'\left(x\right)>0$，$\varphi\left(x\right)$单调递增，不符合题意，

可知$m>0$，且$b>2a>0$，

要证明$ab^2>\dfrac{32}{\mathrm{e}^6}$，只需证明$\ln a+2\ln b>5\ln 2-6$.

由$\begin{cases}\ln a-2ma+2=0\\\ln b-2mb+2=0\end{cases}$得$\begin{cases}\ln a=2ma-2\\\ln b=2mb-2\end{cases}$，则$2m=\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}$，

所以 $\ln a+2\ln b=2m(a+2b)-6=\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}(a+2b)-6=\dfrac{\ln\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1}\left(\dfrac{a}{b}+2\right)-6$.

令 $t=\dfrac{a}{b}$，则 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，要证明 $\ln a+2\ln b>5\ln 2-6$，只需证明 $\dfrac{\ln t}{t-1}(t+2)>5\ln 2$.

令 $h(t)=\dfrac{\ln t}{t-1}(t+2)$，且 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $h'(t)=\dfrac{t-3\ln t-\frac{2}{t}+1}{(t-1)^2}$，

令 $u(t)=t-3\ln t-\dfrac{2}{t}+1$，且 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $u'(t)=1-\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{(t-1)(t-2)}{t^2}>0$，

则 $u(t)$ 在 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时单调递增，故 $u(t)<u\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+3\ln 2-3<0$，

故 $h'(t)<0$，则 $h(t)$ 在 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时单调递减，

所以 $h(t)>h\left(\dfrac{1}{2}\right)=5\ln 2$，即 $\dfrac{\ln t}{t-1}(t+2)>5\ln 2$，则有 $\ln a+2\ln b>5\ln 2-6$，

所以 $ab^2>\dfrac{32}{e^6}$，即原不等式成立.