泸县一中2020级高三（上）第三次学月考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号． 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3． 本试卷满分150分，考试时间120分钟． 考试结束后，请将答题卡交回.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分． 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\ y=\log_2(x+1)\}$，$B=\{x|2^x\le 8\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|-1<x\le 3\}$　　B. $\{x|-1<x\le 2\}$

C. $\{x|-1\le x\le 3\}$　　D. $\{x|-1\le x\le 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先解出集合 A、B，再求 $A\cap B$.

【详解】集合 $A=\{x\,|\,y=\log_2(x+1)\}=\{x\,|\,x>-1\}$，$B=\{x|\ x\le 3\}$，

所以 $A\cap B=\{x\,|-1<x\le 3\}$.

故选：A.

2. 若复数 z 在复平面内对应的点为 $(1,1)$，则其共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部是（　　）

A. i　　B. $-$i　　C. 1　　D. -1

【答案】D

【解析】

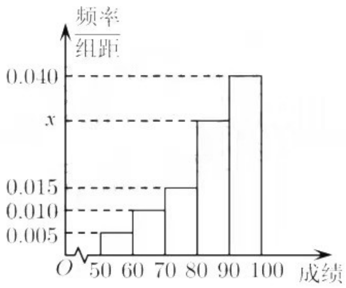
【分析】根据复数的几何意义，以及共轭复数的定义，即可求解

【详解】复数 z 在复平面内对应的点为 $(1,1)$，可得 $z=1+\mathrm{i}$，所以，共轭复数 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部是 -1

故选：D

3. 耀华中学全体学生参加了主题为"致敬建党百年，传承耀华力量"的知识竞赛，随机抽取了400名学生进行成绩统计，发现抽取的学生的成绩都在50分至100分之间，进行适当分

组后（每组为左闭右开的区间），画出频率分布直方图如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 直方图中 x 的值为 0.004

B. 在被抽取的学生中，成绩在区间 $[70,80)$ 的学生数为 30 人

C. 估计全校学生的平均成绩为 84 分

D. 估计全校学生成绩的样本数据的 80%分位数约为 93 分

【答案】C

【解析】

【分析】根据学生的成绩在 50 分至 100 分之间的频率和为 1 可求得 x 的值，就可以判断 A；计算成绩在区间 $[70,80)$ 的学生频率，然后计算在该区间的学生数，以此判断 B；按照频率分布直方图中平均数算法计算可判断 C，按照频率分布直方图中百分位数的计算方法计算可判断 D

【详解】由直方图可得：$(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times10=1$，解得 $x=0.03$，故 A 错误，

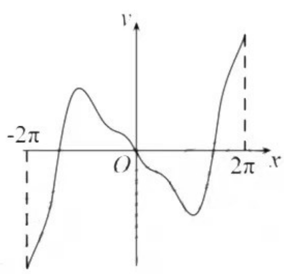
在被抽取的学生中，成绩在区间 $[70,80)$ 的学生数为 $10\times0.015\times400=60$ 人，故 B 错误

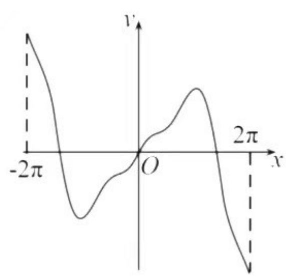
估计全校学生的平均成绩为 $55\times0.05+65\times0.1+75\times0.15+85\times0.3+95\times0.4=84$ 分，故 C 正确

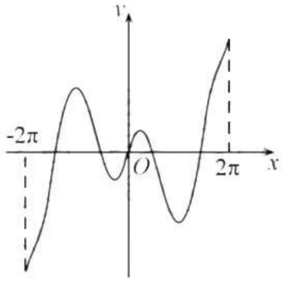
全校学生成绩的样本数据的 80% 分位数约为 $90+\dfrac{0.2}{0.4}\times10=95$ 分，故 D 错误

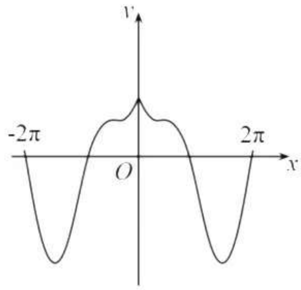
故选：C

4. 函数 $f(x)=\dfrac{5\sin x}{e^{|x|}}+x\cos x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性，结合特殊值，即可排除选项.

【详解】首先 $f(-x)=-f(x)$，所以函数是奇函数，故排除 D，$f(2\pi)=2\pi$，故排除 B，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，故排除 A，只有 C 满足条件.

故选：C

5. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项为（　　）

A. 64　　B. -64

C. 84　　D. -84

【答案】D

【解析】

【分析】写出二项展开式的通项，令 x 的指数等于零，即可得出答案.

【详解】解：$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^9$ 的二项展开式的通项为：

$T_{k+1}=C_9^k\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\cdot C_9^k\cdot x^{\frac{9-3k}{2}},k=1,2,\cdots,9$，

令 $\frac{9-3k}{2}=0$，则 $k=3$，

所以 $T_4=(-1)^3\cdot C_9^3=-84$，

即 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项为 84.

故选：D.

6. 若向量 $\vec{a}=(1,-1),\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，且 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{2}{3}\pi$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值为（　　）

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】依据向量数量积的定义去求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值

【详解】$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},|\vec{b}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\sqrt{2}\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：C

7. 已知$f(x)=\sin x+a\cos x$，实数x_0满足对于任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\le f\left(x_0\right)$，若$\tan x_0=3$，则实数$a$的值为（　　）

A. -3　　B. 3

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题得x_0是$f\left(x\right)$的一个极大值点，化简$f'\left(x_0\right)=\cos x_0-a\sin x_0=0$即得解.

【详解】解：由题意及正弦函数的图象可知，x_0是$f\left(x\right)$的一个极大值点，

由$f'\left(x_0\right)=\cos x_0-a\sin x_0=0$，得$a=\frac{1}{\tan x_0}=\frac{1}{3}$.

故选：D.

8. 过点$P(-1,0)$作圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$的两切线，设两切点为A、B，圆心为C，则过A、B、C的圆方程是

A. $x^2+(y-1)^2=2$　　B. $x^2+(y-1)^2=1$

C. $(x-1)^2+y^2=4$　　D. $(x-1)^2+y^2=1$

【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：由圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$，得到圆心C（1，2），又P（-1，0）

则所求圆的圆心坐标为（0，1），

圆的半径r=$\sqrt{2}$，

所以过A、B、C的圆方程为：$x^2+(y-1)^2=2$

考点：圆的标准方程

9. 志愿服务是办好2022年北京冬奥运的重要基础和保障，现有一冬奥服务站点需要连续六天有志愿者参加志愿服务，每天只需要一名志愿者，现有6名志愿者计划依次安排到该服务站点参加服务，要求志愿者甲不安排第一天，志愿者乙和丙不在相邻两天参加服务，则不同的安排方案共有（　　）

A. 240种　　B. 408种　　C. 1092种　　D. 1120种

【答案】B

【解析】

【分析】首先安排除甲乙丙外的3名志愿者，再分两类：乙丙中间不恰好为甲、乙丙中间恰好为甲分别求安排方案数，最后加总即可.

【详解】1、将安排除甲、乙、丙外其它3名志愿者，有A_3^3种，再分两类讨论：

第一类：

2、安排不相邻的乙丙，相当于将2个球在3个球所形成的4个空中任选2个插入有A_4^2种，

3、安排不在第一天的甲，相当于5个球所成的后5个空中任选一个插入，有C_5^1种，

第二类：

2、将甲安排在乙丙中间有A_2^2种，

3、把甲乙丙作为整体安排，相当于将1个球插入3个球所形成的4个空中有C_4^1种，

所以不同的方案有$A_3^3(A_4^2C_5^1+A_2^2C_4^1)=408$种.

故选：B

10. 过抛物线$x^2=4y$的焦点F的直线l与抛物线交于AB两点，若以线段AB为直径的圆与直线$y=3$相切，则$|AB|=$（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】联立直线方程和抛物线方程，再由韦达定理即可求解.

【详解】解：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB中点为$O(x_0,y_0)$，又直线过$F(0,1)$，

由题意可知直线斜率存在，故可设直线方程为：$y=kx+1$，

联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$得，$x^2-4kx-4=0$，

由韦达定理得，$x_1+x_2=4k$，所以$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2=4k^2+2$，

所以$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2k^2+1$

所以$|AB|=y_1+y_2+p=4k^2+4$，

又以线段AB为直径的圆与直线$y=3$相切，所以$R=3-y_0=\dfrac{|AB|}{2}$，

即$2-2k^2=\dfrac{4k^2+4}{2}$，解得$k^2=0$，$|\mathrm{AB}|=4$，

故选：C.

11. 古希腊亚历山大时期最后一位重要的几何学家帕普斯（Pappus，公元3世纪末）在其代表作《数学汇编》中研究了"三线轨迹"问题：即到两条已知直线距离的乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数的动点轨迹为圆锥曲线.今有平面内三条给定的直线l_1，l_2，l_3，且l_2，l_3均与l_1垂直.若动点M到l_2,l_3的距离的乘积与到l_1的距离的平方相等，则动点M在直线l_2,l_3之间的轨迹是（　　）

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意得到三条直线的关系，不妨设记l_1为$y=0$，直线l_2为$x=0$，l_3为$x=a$，进而可根据条件表示出动点M的轨迹方程，从而得出结论.

【详解】因为在平面内三条给定的直线l_1，l_2，l_3，且l_2，l_3均与l_1垂直，所以l_2，l_3平行，又因为动点M到l_2,l_3的距离的乘积与到l_1的距离的平方相等，记l_1为$y=0$，直线l_2为$x=0$，l_3为$x=a$，

设$M(x,y)$，且动点M在直线l_2,l_3之间，所以M到l_1的距离为$|y|$，M到l_2的距离为$|x|$，M到l_3的距离为$|a-x|$，　所以$y^2=|a-x|\cdot|x|$，

若$a>0$，则$y^2=(a-x)x$；若$a<0$，则$y^2=(x-a)\cdot(-x)$，

所以$y^2=(a-x)x$，即$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$，故动点$M$的轨迹为圆.

故选：A.

12. 已知$k\in\mathrm{R}$，设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2kx+2k, x\le 1\\(x-k-1)e^x+e^3, x>1\end{cases}$，若关于$x$的不等式$f(x)\ge 0$在$x\in R$上恒成立，则$k$的取值范围为(　　)

A. $[0, e^2]$　　B. $[2, e^2]$　　C. $[0, 4]$　　D. $[0, 3]$

【答案】D

【解析】

【分析】当 $x\le 1$ 时，$f(x)=x^2-2kx+2k$，分 $k<1$、$k\ge 1$ 两类讨论，可求得 $k\ge 0$；当 $x>1$ 时，$f(x)=(x-k-1)e^x+e^3$，分 $k\le 1$、$k>1$ 两类讨论，可求得 $k\le 3$；取其公共部分即可得到答案.

【详解】解：（1）当 $x\le 1$ 时，$f(x)=x^2-2kx+2k$，

$\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x=k$，开口向上.

当 $k<1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,k)$ 递减，$(k,1)$ 递增，

$\therefore$ 当 $x=k$ 时，$f(x)$ 有最小值，即 $f(k)\ge 0$，$\therefore 0\le k<1$；

当 $k\ge 1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递减，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值，即 f（1）$=1$，

$\therefore 1\ge 0$ 显然成立，此时 $k\ge 1$.

综上得，$k\ge 0$；

（2）当 $x>1$ 时，$f(x)=(x-k-1)e^x+e^3$，$\therefore f'(x)=(x-k)e^x$，

当 $k\le 1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$\therefore f(x)>f$（1）$=-ke+e^3\ge 0$，$\therefore k\le e^2$，$\therefore$ 此时 $k\le 1$；

当 $k>1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,k)$ 递减，$(k,+\infty)$ 递增，

$\therefore f(x)\ge f(k)=-e^k+e^3\ge 0$，$\therefore k\le 3$，

$\therefore$ 此时 $1<k\le 3$.

综上：$0\le k\le 3$，

$\because$ 关于 x 的不等式 $f(x)\ge 0$ 在 $x\in R$ 上恒成立，则 k 的取值范围为 $0\le k\le 3$，

故选：D.

【点睛】本题考查分段函数的应用，考查不等式恒成立问题，着重考查分类讨论思想和等价转化思想，考查导数的运用，考查运算求解能力和推理能力，属于难题.

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

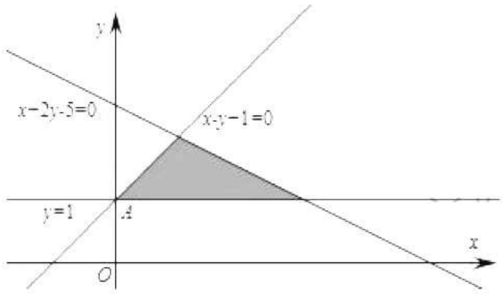
13. 在平面直角坐标系下，若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\le 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值为__________.

【答案】1

【解析】

【分析】由约束条件作出可行域，当直线 $z=2x+y$ 过点 $A(0,1)$ 时，相应坐标值代入 $2x+y$ 求得最小值.

【详解】由约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\le 0\\ x-y+1\ge 0\\ y\ge 1\end{cases}$ 作出可行域如图：



联立 $\begin{cases}x-y+1=0\\ y=1\end{cases}$，解得 $A(0,1)$. 令 $z=2x+y$，

由图可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $A(0,1)$ 时，

z 有最小值为 1，即 $2x+y$ 的最小值为 1，

故答案为：1.

14. 曲线 $y=(3x-2)^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________.

【答案】$9x-y-8=0$（或 $y=9x-8$）

【解析】

【分析】先求导数，代入 $x=1$ 可得切线斜率，结合点斜式可得切线方程.

【详解】$\because y'=9(3x-2)^2$，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y'=9$，则所求切线方程为 $y-1=9(x-1)$，

即 $9x-y-8=0$.

【点睛】本题主要考查利用导数求解曲线的切线方程，切点处的导数值是切线的斜率，是求解关键.

15. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x\in R$，都有 $f(x+3)=-f(x)$，且当 $x\in(0,\frac{3}{2}]$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(\frac{5}{2})=$__.

【答案】$\frac{1}{4}$#0.25

【解析】

【分析】根据题意，结合所以 $f(\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2}+3)=-f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$，即可求解.

【详解】因为函数$f\left(x\right)$是奇函数，对任意的$x\in R$，都有$f\left(x+3\right)=-f\left(x\right)$，

且当$x\in(0,\frac{3}{2}]$时，$f\left(x\right)=x^2$

所以$f(\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2}+3)=-f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

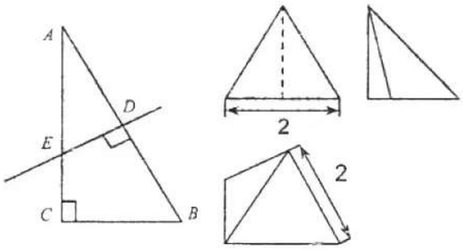
16. 如图，直角三角形ABC中，斜边AB边上的垂直平分线DE交AB于D，交AC于E，现沿DE折成一个三视图如下的四棱锥$A-ECBD$，则在四棱锥$A-ECBD$中，给出下列判断：

①$AE\perp BD$；②平面$AEB\perp$平面ACD；

③$V_{A-ECBD}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$；

④四棱锥$A-ECBD$的外接球表面积为$\frac{28}{3}\pi$.

其中正确的判断有______.



【答案】①②④

【解析】

【分析】由三视图可知，$AD\perp$平面$BCED$；根据线面垂直判定定理，可证明$BE\perp$平面ACD，所以②正确；由四棱锥的体积公式计算可知③错；四棱锥$A-ECBD$的外接球等价于以DA、DE、DB为棱的长方体的外接球，可找到半径计算球的表面积，④正确.

【详解】由三视图可知$AD\perp$平面$BCED$，所以$AD\perp BD$,又$BD\perp ED$,所以$BD\perp$平面AED，可证$AE\perp BD$,所以①正确；由三视图可知$BE=2$，$AB=4$，$\angle EAD=30°$，所以$DE=CE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$CD\perp BE$，所以$BE\perp$平面$ACD$，所以②正确；$V_{A-ECBD}=\frac{1}{3}\times 2S_{\triangle CBD}\times AD=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2=\frac{8\sqrt{3}}{9}$所以③错；四棱锥$A-ECBD$

的外接球等价于以 DA、DE、DB 为棱的长方体的外接球，可得：

$(2R)^2=2^2+2^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$，$\therefore R^2=\frac{7}{3}$，从而 $S_{球表}=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$，所以④正确.

故答案为①②④.

【点睛】本题考查由三视图还原几何体，考查线线垂直、面面垂直的证明，考查几何体体积公式和外接球的表面积，考察了学生的空间想象能力，属于中档题.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必做题：共 60 分．

17. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{2b-c}{a}=\frac{\cos C}{\cos A}$，$a=4$．

（1）求角 A；

（2）若点 D 在边 AC 上，且 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，求△$BCD$ 面积的最大值.

【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$

（2）$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）由正弦定理化边为角，然后由两角和的正弦公式，诱导公式变形可求得 A；

（2）由平面向量的线性运算求得 $DC=\frac{1}{4}AC$，$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，用余弦定理及基本不等式求得 bc 的最大值，可得 $\triangle ABC$ 面积的最大值，从而得结论.

【小问 1 详解】

因为 $\frac{2b-c}{a}=\frac{\cos C}{\cos A}$，由正弦定理得 $\frac{2\sin B-\sin C}{\sin A}=\frac{\cos C}{\cos A}$，

所以 $\sin A\cos C=2\sin B\cos A-\sin C\cos A$，即

$2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)=\sin B$，

三角形中 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，而 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

由 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ 得 $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$，所以 $DC=\frac{1}{4}AC$，

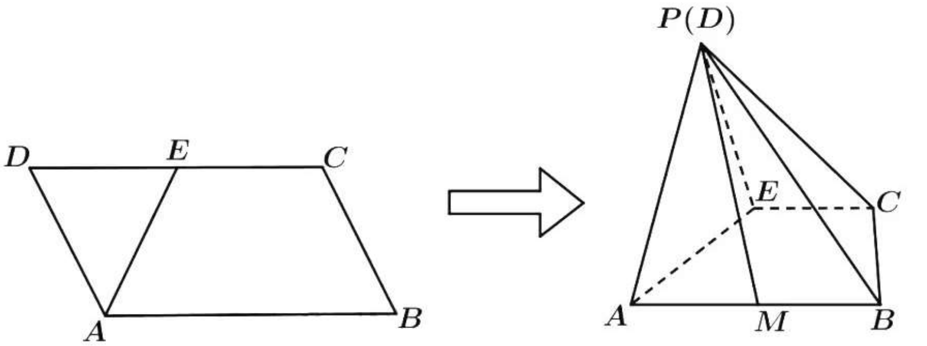
$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，

在$\triangle ABC$中由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$16=b^2+c^2-bc\geq 2bc-bc=bc$，当且仅当$b=c$时等号成立，

所以$(bc)_{\max}=16$，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\times 16\times \sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，

所以△BCD面积的最大值为$\frac{1}{4}\times 4\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

18. 如图，在平行四边形$ABCD$中，$\angle D=60°$，E为CD的中点，且$AE=CE$，现将平行四边形沿AE折叠成四棱锥P-$ABCE$.



（1）已知M为AB的中点，求证：$AE\perp PM$.

（2）若平面$PAE\perp$平面$ABCE$，求二面角$B-PE-C$的余弦值.

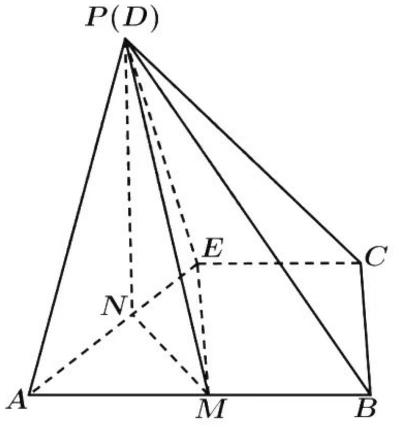
【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】（1）取AE中点N，连结EM，MN，证明$AE\perp$面PMN，即可证明$AE\perp PM$；

（2）先证明$PN\perp MN$，又$MN\perp AE$，$PN\perp AE$，可以以N为原点，$\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}$分别为$x$轴，$y$轴，$z$轴正方向建立空间直角坐标系，用向量法求解.

【详解】（1）证明：



取 AE 中点 N，连结 EM，MN，由于翻折前 E 为 CD 中点，$\therefore DE=CE$.

$\because AE=CE, \angle D=60^\circ$, $\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形，

$\because N$ 为 AE 中点，$\therefore PN\perp AE$.

同理可证：$\triangle AME$ 为等边三角形，故 $MN\perp AE$.

又 $MN\cap PN=N$，

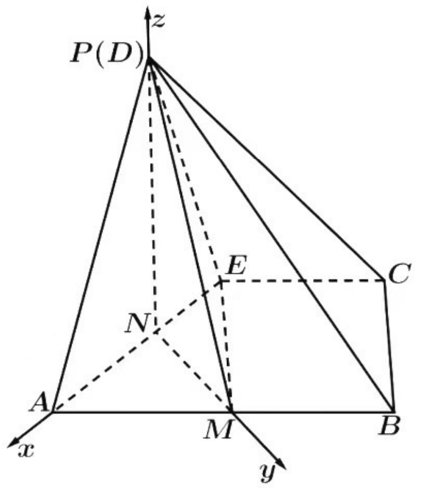
$\therefore AE\perp$ 面 PMN，

$\therefore AE\perp PM$.

（2）因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ACBE$ 且交于 AE，$PN\perp AE$，所以 PN ˆ 平面 $ACBE$，

而 $MN\subseteq$ 平面 $ACBE$,所以 $PN\perp MN$，又 $MN\perp AE$，$PN\perp AE$，

可以以 N 为原点，$\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，



不妨设 $AB=4$，则 $N(0,0,0), A(1,0,0), M(0,\sqrt{3},0), B(-1,2\sqrt{3},0), E(-1,0,0)$，

$C\left(-2,\sqrt{3},0\right),P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，所以$\overrightarrow{EP}=\left(1,0,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{EC}=\left(-1,\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{EB}=\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，

设$\vec{m}=\left(x,y,z\right)$为平面$EPC$的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EP}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

不妨设$x=\sqrt{3}$，则$\vec{m}=\left(\sqrt{3},1,-1\right)$.

同理可求：平面EPB的一个法向量$\vec{n}=\left(-\sqrt{3},0,1\right)$

设二面角$B-PE-C$的平面角为θ，显然$0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|-3-1\right|}{\left|\sqrt{3+1+1}\right|\times\left|\sqrt{3+0+1}\right|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

即二面角$B-PE-C$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【点睛】立体几何解答题的基本结构：

(1)第一问一般是几何关系的证明，用判定定理；

(2)第二问是计算，求角或求距离（求体积通常需要先求距离），通常可以建立空间直角坐标系，利用向量法计算.

19. 在某电视台举行的跑男节目中，某次游戏比赛分三个阶段，只有上一阶段的通过者，才能继续参加下一阶段的比赛，否则就被淘汰，每组选手每通过一个阶段，本组积分加10分，否则为0分，甲、乙两组明星选手参加了这次游戏比赛，已知甲组选手每个阶段通过的概率均为$\frac{1}{2}$，乙组选手每个阶段通过的概率均为$\dfrac{2}{3}$.

（1）求甲、乙两组选手都取得10分就被淘汰的概率；

（2）设甲、乙两组选手的最后积分之和为X，求X的分布列和数学期望.

【答案】（1）$\dfrac{1}{18}$；（2）见解析

【解析】

【分析】（1）甲、乙两组选手都取得10分就被淘汰，则都只通过第一阶段，在第二阶段都被淘汰，又甲、乙两组选手相互独立，所以为独立事件同时发生的概率，由此求出取得10分就被淘汰的概率.（2）由题意知X所有可能取值为0，10，20，30，40，依次求出相应的概率，由此求出X的分布列和数学期望.

【详解】（1）记“甲、乙两组选手都取得10分就被淘汰”为事件A，

则$P\left(A\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{18}$.

（2）X 所有可能取值为 0，10，20，30，40，

且 $P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$，

$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$，

$P(X=20)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{13}{36}$

，

$P(X=30)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，

$P(X=40)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

则 X 的分布列为：

X	0	10	20	30	40
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

$\therefore$ X 的数学期望：$E(X)=0\times\frac{1}{6}+10\times\frac{7}{36}+20\times\frac{13}{36}+30\times\frac{1}{6}+40\times\frac{1}{9}=\frac{335}{18}$.

【点睛】本题考查相互独立事件同时发生的概率，考查离散型随机变量的分布列和数学期望，属于中档题.

20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $D\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，P，Q 是椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点.

（1）若 $PF_1 \parallel QF_2, |PF_1|+|QF_2|=2$，求直线 QF_2 的方程；

（2）延长 PF_1,PF_2 分别交椭圆 C 于点 M，N，设 $\overrightarrow{MF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1P},\overrightarrow{NF_2}=n\overrightarrow{F_2P}$，求 λn 的最小值.

【答案】（1）$x\pm\sqrt[4]{2}y-1=0$

（2）$\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】（1）根据题意求出椭圆方程，设直线 PF_1 的方程为 $x+1=my$，设直线 QF_2 的方程

为$x-1=my$，设$P\left(x_2 x_1\right),Q\left(x_2,y_2\right),y_1>0,y_2>0$，由$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\x_1+1=my_1\end{cases}$，求得$y_1$，从而可求得$\left|PF_1\right|$，同理求得$\left|QF_2\right|$，从而可求得$m$，即可得解；

（2）设$P(x_1,y_1),M(x_3,y_3)$，由$\overrightarrow{MF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1P}$，得$\begin{cases}x_3=-\lambda x_1-\lambda-1\\y_3=-\lambda y_1\end{cases}$，代入椭圆的方程，可求得$\lambda$，同理可求得$n$，从而可得出答案.

【小问1详解】

解：由已知过点$D\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$，①

由$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，②

由①、②，得$a^2=2,b^2=1$，

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

若$PF_1 // QF_2,PF_1+QF_2=2,F_1\left(-1,0\right),F_2\left(1,0\right)$，

设直线PF_1的方程为$x+1=my$，设直线QF_2的方程为$x-1=my$，设

$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right),y_1>0,y_2>0$，

由$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\x_1+1=my_1\end{cases}$，得$\left(m^2+2\right)y_1^2-2my_1-1=0$，解得$y_1=\frac{m+\sqrt{2m^2+2}}{m^2+2}$，

故$\left|PF_1\right|=\sqrt{\left(x_1+1\right)^2+\left(y_1-0\right)^0}=\sqrt{\left(my_1\right)^2+\left(y_1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\left(m^2+1\right)+m\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$，

同理，$\left|QF_2\right|=\frac{\sqrt{2}\left(m^2+1\right)-m\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$，

$\left|PF_1\right|+\left|QF_2\right|=2$，则$\frac{2\sqrt{2}\left(m^2+1\right)}{m^2+2}=2$，$\sqrt{2}\left(m^2+1\right)=m^2+2,m^2=\sqrt{2}$，

故直线QF_2的方程为$x\pm\sqrt[4]{2}y-1=0$；

【小问2详解】

解：设$P(x_1,y_1),M(x_3,y_3)$，

由$\overrightarrow{MF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1P}$，得$\begin{cases}-1-x_3=(x_1+1)\lambda\\ -y_3=\lambda y_1\end{cases}$，

故$\begin{cases}x_3=-\lambda x_1-\lambda-1\\ y_3=-\lambda y_1\end{cases}$，

代入椭圆的方程得$\dfrac{(-\lambda x_1-\lambda-1)^2}{2}+(-\lambda y_1)^2=1$（3），

又由$\dfrac{1}{2}x_1^2+y_1^2=1$，得$y_1^2=1-\dfrac{1}{2}x_1^2$，

代入（3）式得，$(\lambda x_1+\lambda+1)^2+2\lambda^2\left(1-\dfrac{1}{2}x_1^2\right)=2$，

化简得，$3\lambda^2+2\lambda-1+2\lambda(\lambda+1)x_1=0$，即$(\lambda+1)(3\lambda-1+2\lambda x_1)=0$，

显然$\lambda+1\neq 0, 3\lambda-1+2\lambda x_1=0$，故$\lambda=\dfrac{1}{3+2x_1}$，

同理可得$n=\dfrac{1}{3-2x_1}$，

故$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{n}=6, \lambda+n=6\lambda n, \lambda+n=6\lambda n\geq 2\sqrt{\lambda n}, \lambda n\geq\dfrac{1}{9}$，

所以λn的最小值$\dfrac{1}{9}$.

21. 已知函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=ax-1(a\in R)$.

（1）若方程$f(x)-g(x)=0$存在两个不等的实根x_1，x_2，求a的取值范围；

（2）满足（1）问的条件下，证明：$x_1\cdot x_2>1$.

【答案】（1）$0<a<1$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）将$\ln x=ax-1$，转化为$a=\dfrac{1+\ln x}{x}(x>0)$，即函数$T(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$与直线$y=a$在$(0，+\infty)$上有两个不同交点求解；另解：令$h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-ax+1(x>0)$. 求导$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，分 $a\leq 0$，$a>0$讨论求解；

(2)根据x_1，x_2是$\ln x-ax+1=0$的两个根，得到$a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$， 将证$x_1x_2>1$，即$\ln x_1+\ln$

$x_2>0$，转化为证$\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，进而转化为$ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$.，令$t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0，1)$，转化为证明$ln\,t<-\dfrac{2(t-1)}{(t+1)}$.

【详解】(1) 由题意，$\ln x=ax-1$，可得$a=\dfrac{1+\ln x}{x}(x>0)$，

转化为函数$T(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$与直线$y=a$在$(0，+\infty)$上有两个不同交点，

$T'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$ $(x>0)$，

故当$x\in(0，1)$时，$T'(x)>0$；当$x\in(1，+\infty)$时，$T'(x)<0$，

故$T(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

所以$T(x)_{max}=T(1)=1$.

又$T\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$，故当$x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时，$T(x)<0$，当$x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时，$T(x)>0$.

可得$a\in(0，1)$.

另解：令$h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-ax+1(x>0)$,则：$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，

①当$a\le0$时，$h'(x)>0$恒成立，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，不满足题意；

②当$a>0$时，$y=h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

令$h'(x)=0$,则$x=\dfrac{1}{a}$，当$x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right),h'(x)>0,x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right),h'(x)<0$,

$\therefore h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减；

$\therefore h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}>0,\therefore\dfrac{1}{a}>1$,即$0<a<1$;

综上：$0<a<1$

(2)证明：$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，因为x_1，x_2是$ln\,x-ax+1=0$的两个根，

故$ln\,x_1-ax_1+1=0$，$ln\,x_2-ax_2+1=0\Rightarrow a=\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}$，

要证$h'(x_1x_2)<1-a$，

只需证$x_1x_2>1$，即证$ln\,x_1+ln\,x_2>0$，即证$(ax_1-1)+(ax_2-1)>0$，

即只需证明 $a>\frac{2}{x_1+x_2}$ 成立，即证 $\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$.

不妨设 0<x_1<x_2，故 $ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2\left(x_1-x_2\right)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.(*)

令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0，1)$，$\varphi(t)=ln\,t-\frac{2\left(t-1\right)}{\left(t+1\right)}$，

$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{\left(t+1\right)^2}=\frac{\left(t-1\right)^2}{t\left(t+1\right)^2}>0$，

则 $h(t)$在(0，1)上单调递增，则$\varphi(t)<\varphi(1)=0$，

故（*）式成立，即要证不等式得证.

【点睛】方法点睛：用导数研究函数的零点，一方面用导数判断函数的单调性，借助零点存在性定理判断；另一方面，也可将零点问题转化为函数图象的交点问题，利用数形结合来解决.

（二）选做题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题记分．

选修 4-4：坐标系与参数方程

22. 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho-6\cos\theta=0$．

（1）求直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）已知点 $M\left(1,0\right)$，若直线 l 与曲线 C 交于 P，Q 两点，求 $\left|MP\right|^2+\left|MQ\right|^2$ 的值.

【答案】(1) $x-y-1=0$；$\left(x-3\right)^2+y^2=9$. (2) 18.

【解析】

【分析】(1) 由极坐标与直角坐标的互化公式，可直接得出直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 先由题意得直线 l 的参数方程，代入曲线的直角坐标方程，根据参数的方法求解，即可得出结果.

【详解】(1) 因为直线 $l:\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$.

即直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$.

因为曲线 $C:\rho-6\cos\theta=0$，则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6x=0$，即

$(x-3)^2+y^2=9$.

（2）设直线l的参数方程为$\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）

将其代入曲线C的直角坐标系方程得$t^2-2\sqrt{2}t-5=0$.

设P,Q对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1t_2=-5, t_1+t_2=2\sqrt{2}$，

所以$|MP|^2+|MQ|^2=|t_1|^2+|t_2|^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=18$.

【点睛】本题主要考查极坐标与直角坐标的互化，以及参数的方法求两点间距离，熟记公式即可，属于常考题型.

选修 4-5：不等式选讲

23. 设函数$f(x)=|x-2|-|2x+1|$.

（1）求不等式$f(x)\le x$的解集;

（2）若不等式$f(x)\ge t^2-t$在$x\in[-2,-1]$时恒成立，求实数t的取值范围.

【答案】（1）$\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$（2）$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\le t\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】（1）将$f(x)$写成分段函数的形式.即$f(x)=\begin{cases} x+3, x\le-\dfrac{1}{2} \\ -3x+1, -\dfrac{1}{2}<x<2 \\ -x-3, x\ge2 \end{cases}$.进而求解即可;

（2）不等式$f(x)\ge t^2-t$在$x\in[-2,-1]$时恒成立可转化为$f(x)_{\min}\ge t^2-t$恒成立,进而求解即可

【详解】解：（1）$f(x)=\begin{cases} x+3, x\le-\dfrac{1}{2} \\ -3x+1, -\dfrac{1}{2}<x<2 \\ -x-3, x\ge2 \end{cases}$，

由$f(x)\le x$，

则$\begin{cases} x \le -\frac{1}{2} \\ x+3 \le x \end{cases}$，或$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 2 \\ -3x+1 \le x \end{cases}$，或$\begin{cases} x \ge 2 \\ -x-3 \le x \end{cases}$，

解得$\varnothing$或$\frac{1}{4} \le x < 2$或$x \ge 2$，

故解集为$\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

（2）依题意得，不等式$f(x) \ge t^2 - t$在$x \in [-2,-1]$时恒成立，则$f(x)_{\min} \ge t^2 - t$，

当$x \in [-2,-1]$时，$f(x) = x+3$，则$f(x)$在$x \in [-2,-1]$上单调递增，

所以$f(x)_{\min} = f(-2) = -2+3 = 1$，

则$t^2 - t \le 1$，解得$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le t \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【点睛】本题考查解绝对值不等式，考查不等式的恒成立问题，考查运算能力与转化思想

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。