

云南师大附中2024届高考适应性月考卷（一）

数 学

注意事项：

1.

答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚。

2.

每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分150分，考试用时120分钟。

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 已知集合 $A = \{x | |x| \leq 2\}$, $B = \{x | x(x-3) \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()A. $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ C. $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式求得集合 A, B , 根据集合的交集运算即可求得答案.【详解】由题意可得 $A = \{x | |x| \leq 2\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x(x-3) \geq 0\} = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$,故 $A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$,

故选：B

2. $\frac{1+i}{2+i}$ 的实部与虚部之和为 ()A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法运算化简 $\frac{1+i}{2+i}$ ，确定实部和虚部，即可得答案.

【详解】由题意得 $\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{5} = \frac{3+i}{5}$,

故 $\frac{1+i}{2+i}$ 的实部与虚部之和为 $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$,

故选: A

3. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4 + a_5 = 24$, $S_6 = 48$, 则 $a_9 =$ ()

A. 4 B. 24 C. 30 D. 32

【答案】C

【解析】

【分析】由等差数列通项公式和前 n 项和公式，列方程组解出数列首项和公差，可求 a_9 的值.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d ，则有 $\begin{cases} a_4 + a_5 = 2a_1 + 7d = 24 \\ S_6 = 6a_1 + 15d = 48 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 4 \end{cases}$ ，所以 $a_9 = a_1 + 8d = -2 + 4 \times 8 = 30$

故选: C

4. 已知向量 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} - t\vec{b}$, 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $t =$ ()

A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{25}{3}$ C. 3 D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】利用向量线性运算的坐标表示和向量垂直的坐标表示，列方程求 t 的值.

【详解】 $\vec{c} = \vec{a} - t\vec{b} = (3, 4) - t(1, 0) = (3-t, 4)$,

$\vec{a} \perp \vec{c}$, 则有 $3(3-t) + 4 \times 4 = 0$, 解得 $t = \frac{25}{3}$.

故选: B

5.

我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题：在下雨时，用一个圆台形的天池盆接

雨水.天池盆盆口直径为二尺八寸,盆底直径为一尺二寸,盆深一尺八寸.若盆中积水体积为盆体积的一半,则平地降雨量约是(

)寸.(结果四舍五入取整数)(注:①平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积;②一尺等于十寸)

A. 3

B. 4

C. 5

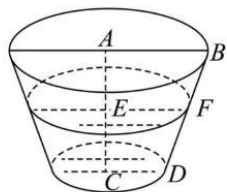
D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】根据圆台的体积公式求得天池盆的体积,即可求得盆中积水的体积,根据平地降雨量的含义即可求得答案.

【详解】由题意可知天池盆上底面半径为14寸,下底面半径为6寸,高为18寸,



则天池盆体积为 $\frac{1}{3}\pi \times 18 \times (6^2 + 14^2 + 6 \times 14) = 1896\pi$ (立方寸)

故盆中积水体积为 $1896\pi \times \frac{1}{2} = 948\pi$ (立方寸),

故平地降雨量约为 $\frac{948\pi}{\pi \times 14^2} \approx 5$ (寸),

故选:C

6. 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan \alpha \cdot \cos \beta = 1 + \sin \beta$, 则 ()

A. $\sin(3\alpha - \beta) = 1$

B. $\sin(3\alpha + \beta) = -1$

C. $\sin(2\alpha - \beta) = 1$

D. $\sin(2\alpha + \beta) = -1$

【答案】C

【解析】

【分析】对题中条件进行变化化简,可以得到 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, 进一步即可判断正确答案.

【详解】 $\because \tan \alpha \cdot \cos \beta = 1 + \sin \beta$,

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \beta = 1 + \sin \beta,$$

$$\text{即 } \sin \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha, \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha = \cos \alpha,$$

$$\text{即 } \sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\text{又 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{则 } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}, \therefore \sin(2\alpha - \beta) = 1, \text{ 故 C 正确.}$$

故选: C.

7. 用五个5和两个2组成一个7位数, 则组成的7位数中两个2不相邻的概率为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{7}$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出用五个5和两个2组成一个7位数, 总的排法数, 再求出组成的7位数中两个2不相邻的排法数, 根据古典概型的概率公式即可得答案.

【详解】由题意可知五个5和两个2组成一个7位数, 可看作7个位置,

先排2, 有 $C_7^2 = 21$ 种排法, 其余位置排5, 此时共有 $21 \times 1 = 21$ 种排法;

而组成的7位数中两个2不相邻, 可采用插空法,

即五个5先排, 只有一种排法, 在形成的6个空中选2个排2, 有 $C_6^2 = 15$ 种排法,

故用五个5和两个2组成一个7位数, 则组成的7位数中两个2不相邻的概率为 $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$,

故选: D

8. 设 $a = \frac{1}{3}$, $b = \ln \frac{7}{5}$, $c = \sin \frac{1}{3}$, 则 ()

A. $c < a < b$

B. $b < c < a$

C. $c < b < a$

D. $a < b < c$

【答案】A

【解析】

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{2(\frac{7}{5}-1)}{\frac{7}{5}+1}$$

【分析】因为 $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x>0)$

，利用导数判断单调性，可得 $b>a$ ，令 $g(x) = x - \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ，利用导数判断单调性，可得 $a>c$ 。

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{2(\frac{7}{5}-1)}{\frac{7}{5}+1}$$

【详解】因为

$$\text{所以设 } f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x>0), \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

$$\text{所以 } f(\frac{7}{5}) > f(1) = 0, \quad \ln \frac{7}{5} - \frac{2(\frac{7}{5}-1)}{1+\frac{7}{5}} > 0, \quad \text{所以 } \ln \frac{7}{5} - \frac{1}{3} > 0, \quad \text{即 } \ln \frac{7}{5} > \frac{1}{3},$$

所以 $b>a$ 。

$$\text{令 } g(x) = x - \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}),$$

$$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \quad \text{所以 } g(x) = x - \sin x \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{2}) \text{ 上为增函数,}$$

$$\text{所以 } g(\frac{1}{3}) > g(0) = 0, \quad \frac{1}{3} - \sin \frac{1}{3} > 0, \quad \text{即 } \frac{1}{3} > \sin \frac{1}{3},$$

所以 $a>c$ ，

综上所述： $b>a>c$ 。

故选：A

$$\text{【点睛】关键点点睛：构造函数 } f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x>0), \quad g(x) = x - \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

，利用导数判断单调性，根据单调性比较大小是解题关键。

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

9. 若 $a>b$ ，则（ ）

A. $\ln(a-b) > 0$

B. $3^a > 3^b$

C. $a^3 - b^3 > 0$

D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

【答案】BC

【解析】

【分析】由不等式的性质，指数函数、对数函数和幂函数的性质，判断不等式是否成立.

【详解】 $\ln(a-b) > 0$ 需要 $a-b > 1$ ， $a > b$ 不能满足，A选项错误；

由指数函数 $y = 3^x$ 的性质，当 $a > b$ 时，有 $3^a > 3^b$ ，B选项正确；

由幂函数 $y = x^3$ 的性质，当 $a > b$ 时，有 $a^3 > b^3$ ，即 $a^3 - b^3 > 0$ ，C选项正确；

当 $a = 2, b = -1$ 时，满足 $a > b$ ，但 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立，D选项错误.

故选：BC

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(2x + \varphi) + 1 \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 轴对称，则 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0 \right)$ 中心对称

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$ 上是增函数

C. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x) = \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = \sqrt{3}\sin 2x + 1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

【答案】BD

【解析】

【分析】根据函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 轴对称，可确定 φ ，即得 $f(x)$ 的表达式，将

$x = \frac{\pi}{12}$ 代入 $f(x)$ 中可判断A；根据 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$ ，确定 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

，结合正弦函数的单调性可判断B；根据正弦函数以及复合函数的求导法则可判断C；根据三角函数图象的平移变换可判断D.

【详解】由题意函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(2x + \varphi) + 1, \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 轴对称,

则 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 故 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 即 $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$,

对于A, 将 $x = \frac{\pi}{12}$ 代入 $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 得 $\sqrt{3}\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 1$,

即 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$ 中心对称, A错误;

对于B, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

因为正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上是增函数, B正确;

对于C, $f'(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, C错误;

对于D, 函数 $y = \sqrt{3}\sin 2x + 1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

$y = \sqrt{3}\sin 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + 1 = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 即函数 $f(x)$ 的图象, D正确,

故选: BD

11. 已知O为坐标原点, 抛物线C: $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程为 $x = -1$

, 过焦点F的直线l交抛物线C于A, B两点, 则 ()

A. 若 $|AF| = 5$, 则 $|OA| = 4\sqrt{2}$

B. 若 $|AB| = 8$, 则直线l的斜率为1

C. $2|AF| + |BF| \geq 3 + 2\sqrt{2}$

D. $\triangle OAB$ 面积的最小值为2

【答案】ACD

【解析】

【分析】由抛物线准线方程可求得抛物线方程，利用焦半径公式可求得A点坐标，即可判断A；

设直线l的方程，联立抛物线方程，可得根与系数的关系式，结合 $|AB|=8$ 求得 $x_1+x_2=6$ ，即可求得直线斜率，判断B；利用焦半径公式结合基本不等式可判断C；表示出 $\triangle OAB$ 面积，结合基本不等式求得其最小值，判断D.

【详解】因为抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-1$ ，故 $\frac{p}{2}=1, \therefore p=2$ ，

故 $y^2=4x$ ，焦点为 $F(1,0)$ ，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

对于A， $|AF|=x_1+1=5, \therefore x_1=4$ ，代入 $y^2=4x$ 得 $y^2=16$ ，即 $y_1^2=16$

故 $|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ，A正确；

对于B， $|AB|=8$ ，则 $x_1+x_2+2=8, \therefore x_1+x_2=6$ ，

当直线AB为 $x=1$ 时， $|AB|=4$ ，由此可判断 $|AB|=8$ 时，直线l的斜率存在且不等于0，

设直线l的方程为 $y=k(x-1)$ ，联立 $y^2=4x$ 可得： $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0, (k \neq 0)$ ，

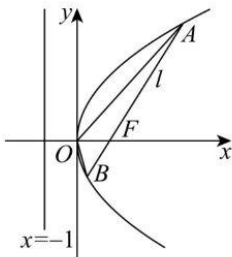
故 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=6$ ，解得 $k=\pm 1$ ，满足 $\Delta>0$ ，故B错误；

对于C，由B的分析可知 $x_1x_2=1$ ，当直线AB为 $x=1$ 时，也有 $x_1x_2=1$ 成立；

故 $2|AF|+|BF|=2(x_1+1)+x_2+1=2x_1+x_2+3 \geq 2\sqrt{2x_1x_2}+3=3+2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $2x_1=x_2$ 即 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\sqrt{2}$ 时，取得等号，C正确；

对于D，不妨设A点在第一象限，则 $y_1=2\sqrt{x_1}, y_2=-2\sqrt{x_2}$ ，



故 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |OF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}| = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$,

则 $S_{\triangle OAB}^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 2\sqrt{x_1 x_2} + 2 = 4$,

当且仅当 $x_1 = x_2 = 1$ 时等号成立, 即 $\triangle OAB$ 面积的最小值为 2, D 正确,

故选: ACD

12. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的棱长均为 6, 其内有 n 个小球, 球 O_1 与三棱锥 $A-BCD$

的四个面都相切, 球 O_2 与三棱锥 $A-BCD$ 的三个面和球 O_1 都相切, 如此类推, $\dots$, 球 O_n

与三棱锥 $A-BCD$ 的三个面和球 O_{n-1} 都相切 ($n \geq 2$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$), 球 O_n 的表面积为 S_n

, 体积为 V_n , 则 ()

A. $V_1 = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi$

B. $S_3 = \frac{3\pi}{8}$

C. 数列 $\{V_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{8}$ 的等比数列

D. 数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $8\pi \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据题意求出 $r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}r_1$, 依此类推可得 $\{r_n\}$ 是首项为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 再根据球的表面积和体积公式逐项判断可得答案.

【详解】如图所示, AO 是三棱锥 $A-BCD$ 的高, O 是三角形 BCD 的中心,

设三棱锥 $A-BCD$ 的棱长均为 a , 所以 $OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

$$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

O_1 是三棱锥 $A-BCD$ 的内切球的球心, O_1 在 AO 上,

设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球半径为 R ，球 O_n 的半径为 r_n ，

则由 $O_1B^2 = OO_1^2 + OB^2$ ，得 $R^2 = (\frac{\sqrt{6}}{3}a - R)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2$ ，得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ 。

所以 $r_1 = AO - AO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ，

又 $a=6$ ，所以 $r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

所以 $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$ 。故A不正确；

在 AO 上取点 E ，使得 $EO_1 = r_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ，则 $AE = AO - 2r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a$ ，即 E 为 AO

的中点，则球 O_2 与球 O_1 切于 E ，

过 E 作与底面 BCD 平行的平面，分别与 AB, AC, AD 交于 B_1, C_1, D_1 ，

则球 O_2 是三棱锥 $A-B_1C_1D_1$ 的内切球，

因为 E 为 AO 的中点，所以三棱锥 $A-B_1C_1D_1$ 的棱长是三棱锥 $A-BCD$ 的棱长的一半，

所以球 O_2 的内切球的半径 $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ ，

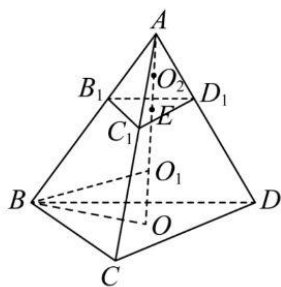
以此类推，所以 $\{r_n\}$ 是首项为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $r_n = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{6}}{2^n}$ ， $r_3 = \frac{\sqrt{6}}{8}$ ， $S_3 = 4\pi r_3^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2 = \frac{3\pi}{8}$ ，故B正确；

所以 $V_n = \frac{4}{3}\pi r_n^3$ ， $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{r_{n+1}^3}{r_n^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ ，即数列 $\{V_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{8}$ 的等比数列，故C正确；

$S_n = 4\pi r_n^2 = 4\pi \cdot \frac{6}{4^n} = \frac{6\pi}{4^{n-1}}$ ，

$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = 6\pi \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = 6\pi \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 8\pi \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ ，故D正确。



故选：BCD

【点睛】关键点睛：利用球与三棱锥内切求出球的半径以及相邻两个球的半径之间的关系是解题关键.

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 在 $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中， x 的系数为_____。（用数字作答）

【答案】80

【解析】

【分析】由题设可得展开式通项为 $T_{r+1} = 2^r C_5^r x^{10-3r}$ ，进而确定含 x 项的 r 值，即可求其系数.

【详解】由题设，展开式通项为 $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = 2^r C_5^r x^{10-3r}$ ，

所以，令 $10-3r=1$ 有 $r=3$ ，则 x 的系数为 $2^3 C_5^3 = 80$.

故答案为：80

14. 若半径为3的圆经过点 $(6,8)$ ，则其圆心到原点的距离的最小值为_____.

【答案】7

【解析】

【分析】确定半径为3且经过点 $(6,8)$ 的圆的圆心的轨迹是以 $(6,8)$ 为圆心，以3为半径的圆，即可求得答案

【详解】设圆心坐标为 (x,y) ，则 $\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2} = 3$ ，即 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9$ ，

即圆心轨迹是以 $(6,8)$ 为圆心，以3为半径的圆，

$(6,8)$ 到原点距离为 $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

故圆 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9$ 上的点到原点距离的最小值为 $10-3=7$ ，

即半径为3的圆经过点(6,8), 则其圆心到原点的距离的最小值为7,
故答案为: 7

15. 若直线 l 与曲线 $y^2=x$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切, 则 l 的方程为_____.

【答案】 $x-2y+1=0$ 或 $x+2y+1=0$

【解析】

【分析】曲线 $y^2=x$ 转化为 $y=\sqrt{x}$, 或 $y=-\sqrt{x}$

, 利用导数几何意义表达出切线斜率, 写出切线方程, 再利用圆心到直线的距离等于半径, 得出方程.

【详解】由题意, $y^2=x$, 则 $y=\sqrt{x}$, 或 $y=-\sqrt{x}$,

设直线 l 在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的切点为 $(x_0, \sqrt{x_0})$, 则 $x_0>0$,

函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 则直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$,

则直线 l 的方程为 $y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$, 即 $x-2\sqrt{x_0}y+x_0=0$,

由于直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 相切, 则 $\frac{x_0}{\sqrt{1+4x_0}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

两边平方并整理得 $5x_0^2-4x_0-1=0$, 解得 $x_0=1$, $x_0=-\frac{1}{5}$ (舍),

则当直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切, 方程为 $x-2y+1=0$;

同理可求当直线 l 与曲线 $y=-\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切, 方程为 $x+2y+1=0$

故答案为: $x-2y+1=0$ 或 $x+2y+1=0$.

【点睛】本题考查求出曲线切线方程, 解题的关键是利用导数表示出斜率, 进而得出切线的表达式.

16. 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 交于 A, B 两点, 且 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方. 若 $\angle APB = 60^\circ$, 则 $\triangle PAB$ 的周长是_____.

【答案】 $\frac{18\sqrt{6} + 6\sqrt{15}}{7}$

【解析】

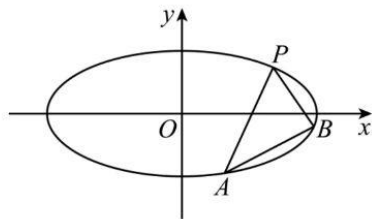
【分析】确定点 P 在椭圆上, 设 $y = \frac{1}{3}x + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

, 联立椭圆方程可得根与系数的关系, 化简可得 $k_{PA} + k_{PB} = 0$, 结合题意可求得

$k_{PA} = \sqrt{3}, k_{PB} = -\sqrt{3}$, 由此可求出 A, B 的横坐标, 即可求得 $|PA|, |PB|, |AB|$, 即得答案.

【详解】由题意知 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 满足 $\frac{(3\sqrt{2})^2}{36} + \frac{(\sqrt{2})^2}{4} = 1$, 即 P 在椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上,

设 $y = \frac{1}{3}x + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,



联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + m \\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, 得 $2x^2 + 6mx + 9m^2 - 36 = 0$,

需满足 $\Delta = (6m)^2 - 4 \times 2 \times (9m^2 - 36) > 0$, 即 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$,

又因为 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方, 故 $\frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + m < 0$, 即 $m < 0$, 即 $-2\sqrt{2} < m < 0$,

若 A 或 B 的横坐标为 $3\sqrt{2}$, 则 $2 \times (3\sqrt{2})^2 + 6m \times 3\sqrt{2} + 9m^2 - 36 = 0$,

则 $m = 0$ 或 $m = -2\sqrt{2}$, 与 $-2\sqrt{2} < m < 0$ 不符,

故 A 或 B 的横坐标不可能为 $3\sqrt{2}$;

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -3m, x_1 x_2 = \frac{9m^2 - 36}{2}, \quad k_{PA} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 3\sqrt{2}}, k_{PB} = \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 3\sqrt{2}},$$

$$\text{则 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 3\sqrt{2}} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 3\sqrt{2}} = \frac{(y_1 - \sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2}) + (y_2 - \sqrt{2})(x_1 - 3\sqrt{2})}{(x_1 - 3\sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2})}$$

$$\text{上式中, 分子等于 } \left(\frac{1}{3}x_1 + m - \sqrt{2}\right)(x_2 - 3\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{3}x_2 + m - \sqrt{2}\right)(x_1 - 3\sqrt{2})$$

$$= \frac{2}{3}x_1 x_2 + (m - 2\sqrt{2})(x_1 + x_2) - 6\sqrt{2}(m - \sqrt{2})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9m^2 - 36}{2} + (m - 2\sqrt{2})(-3m) - 6\sqrt{2}(m - \sqrt{2})$$

$$= 3m^2 - 12 - 3m^2 + 6\sqrt{2}m - 6\sqrt{2}m + 12 = 0, \quad \text{即 } k_{PA} + k_{PB} = 0,$$

又 $\angle APB = 60^\circ$, 则 PA, PB 与 x 轴围成的三角形为正三角形,

$$\text{故 } k_{PA} = \sqrt{3}, k_{PB} = -\sqrt{3},$$

$$\text{故直线 } PA \text{ 的方程 } y - \sqrt{2} = \sqrt{3}(x - 3\sqrt{2}), \text{ 联立 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\text{可得 } 14x^2 + 9\sqrt{6}(1 - 3\sqrt{3})x + 18(13 - 3\sqrt{3}) = 0, \text{ 其两根为 } x_1, 3\sqrt{2},$$

$$\text{则 } x_1 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{18(13 - 3\sqrt{3})}{14}, \text{ 即 } x_1 = \frac{3\sqrt{2}(13 - 3\sqrt{3})}{14},$$

$$\text{故 } |PA| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} \cdot |x_1 - 3\sqrt{2}| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1)}{7};$$

$$\text{同理求得 } x_2 = \frac{3\sqrt{2}(13 + 3\sqrt{3})}{14}, \quad |PB| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)}{7},$$

$$\text{而 } |AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{10}}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{7} = \frac{6\sqrt{15}}{7},$$

$$\text{故 } \triangle PAB \text{ 的周长是 } |PA| + |PB| + |AB| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1)}{7} + \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)}{7} + \frac{6\sqrt{15}}{7} = \frac{18\sqrt{6} + 6\sqrt{15}}{7},$$

$$\text{故答案为: } \frac{18\sqrt{6} + 6\sqrt{15}}{7}$$

【点睛】难点点睛：本题考查直线与椭圆的位置关系，求解三角形周长，即要求出直线和椭圆相交的弦长，难点在于计算的复杂以及计算量较大，因此要十分细心.

四、解答题（共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sin 2C = \sin C$.

(1) 求角 C ；

(2) 若 $c = \sqrt{7}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$

(2) $\sqrt{31} + \sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 由二倍角的正弦公式可求出结果；

(2) 由面积公式列式求出 $ab = 8$ ，再由余弦定理求出 $a + b = \sqrt{31}$ 即可得 $\triangle ABC$ 的周长.

【小问1详解】

由 $\sin 2C = \sin C$ ，得 $2 \sin C \cos C = \sin C$ ，

因为 $0 < C < \pi$ ， $\sin C > 0$ ，所以 $\cos C = \frac{1}{2}$ ，所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

【小问2详解】

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = 2\sqrt{3}$ ，所以 $ab = 8$ ，

由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 - 3ab$ ，得 $7 = (a + b)^2 - 24$ ，得 $a + b = \sqrt{31}$.

所以 $a + b + c = \sqrt{31} + \sqrt{7}$.

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{31} + \sqrt{7}$.

18.

某研究机构随机抽取了新近上映的某部影片的120名观众，对他们是否喜欢这部影片进行了调查，得到如下数据（单位：人）：

	喜欢	不喜欢	合计
男性	40	30	70

女性	35	15	50
合计	75	45	120

根据上述信息，解决下列问题：

- (1) 根据小概率值 $\alpha = 0.10$ 的独立性检验，分析观众喜欢该影片与观众的性别是否有关；
 (2) 从不喜欢该影片的观众中采用分层抽样的方法，随机抽取6人. 现从6人中随机抽取2人，若所选2名观众中女性人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

附：
$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

α	0.15	0.10	0.05	0.010	0.001
χ_{α}^2	2.072	2.706	3.841	6.635	10.828

【答案】(1) 不能认为观众喜欢该影片与观众的性别有关

(2) 分布列见解析； $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 计算 χ^2 的值，与临界值表比较，可得结论；

(2) 确定随机抽取6人中男性和女性的人数，进而确定随机变量 X 的可能取值，求得每个值对应的概率，可得分布列，根据期望公式可求得数学期望.

【小问1详解】

由题意得
$$\chi^2 = \frac{120 \times (40 \times 15 - 35 \times 30)^2}{70 \times 50 \times 75 \times 45} \approx 2.057 < 2.706 = \chi_{0.10}^2,$$

故根据小概率值 $\alpha = 0.10$ 的独立性检验，不能认为观众喜欢该影片与观众的性别有关；

【小问2详解】

由题意知从不喜欢该影片的观众中采用分层抽样的方法，随机抽取6人，

由于不喜欢该影片的观众中男性与女性的比例为2:1，

故随机抽取6人中有4名男性和2名女性，

故 X 的取值可能为0, 1, 2，

则
$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}, P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(X=2) = \frac{C_4^0 C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

故

19. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 m 为整数, 且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $m \geq \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}$, 求 m 的最小值.

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 4.

【解析】

【分析】(1) 根据等比数列的通项公式可求出结果;

(2) 根据错位相法求出不等式右边之和, 由此可得结果.

【小问1详解】

设公比为 q , 由 $a_5 = 4a_3$, 得 $a_3 q^2 = 4a_3$, 得 $q^2 = 4$,

又 $a_n > 0$, $q > 0$, 所以 $q = 2$, $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$.

【小问2详解】

由 (1) 知, $a_n = 2^{n-1}$, 故 $\frac{n}{a_n} = \frac{n}{2^{n-1}}$,

$$\text{设 } S_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$$

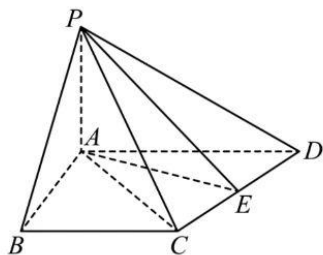
$$\text{所以 } S_n - \frac{1}{2} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

所以 $S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

当 n 趋近于无穷大时, $\frac{n+2}{2^{n-1}}$ 趋近于 0, 所以 S_n 趋近于 4 且 $S_n < 4$,
所以 $m \geq 4$, 所以 m 的最小值为 4.

20. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=3$, $AD=5$, $\angle DAB = \angle ABC = \angle CBP = 90^\circ$,
 $PA \perp CD$, E 为 CD 的中点.



(1) 证明: 平面 $PCD \perp$ 平面 PAE ;

(2) 若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求二面角 $P-CD-A$ 的正弦值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{4\sqrt{41}}{41}$

【解析】

【分析】(1) 连接 AE, AC, PE , 由已知可得 $AC=AD$, 即有 $AE \perp CD$, 再由线面垂直的判定证 $CD \perp$ 面 PAE , 根据面面垂直的判定即可得结论;

(2) 首先根据条件作出直线 PB 与平面 PAE 所成的角, 点 B 作 $BG \parallel CD$, 分别与 AE , AD 相交于 F , G , 连接 PF , $\angle BPF$ 为直线 PB 与平面 PAE 所成的角, $\angle PBA$ 为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角, 根据这两个角相等, 得到边的关系, 最后得到二面角 $P-CD-A$ 的平面角为 $\angle PEA$.

【小问1详解】

平面 PCD 与平面 PAE 能垂直, 理由如下:

在 $\triangle ABC$ 中 $AB=4, BC=3, \angle ABC=90^\circ$, 故 $AC=5$, 即 $AC=AD$,
所以 $\triangle ADC$ 为等腰三角形, 又 E 为 CD 中点, 故 $AE \perp CD$,

因为 $PA \perp CD$ ，且 $PA \cap AE = A$ ， $PA, AE \subset$ 面 PAE ，所以 $CD \perp$ 面 PAE ，
由 $CD \subset$ 面 PCD ，故面 $PCD \perp$ 面 PAE 。

【小问2详解】

$\because CD \perp$ 平面 PAE ，

$\therefore \angle PEA$ 是二面角 $P-CD-A$ 的平面角，

过点 B 作 $BG \parallel CD$ ，分别与 AE ， AD 相交于 F ， G ，连接 PF ，

由 (1) 知 $BG \perp$ 平面 PAE ，

$\therefore \angle BPF$ 为直线 PB 与平面 PAE 所成的角，且 $BG \perp AE$ ，

由 $\angle CBP = 90^\circ$ ，则 $PB \perp CB$ ，由 $\angle ABC = 90^\circ$ ，则 $AB \perp CB$ ，

又 $PB \cap AB = B$ ，且 $PB, AB \subset$ 面 PAB ，则 $CB \perp$ 面 PAB ，而 $PA \subset$ 面 PAB ，

所以 $PA \perp CB$ ，结合 $PA \perp CD$ ， $CB \cap CD = C$ ，且 $CB, CD \subset$ 面 $ABCD$ ，

所以 $PA \perp$ 面 $ABCD$ ，则 $\angle PBA$ 为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角，

有题意知 $\angle PBA = \angle BPF$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle PBA \cong \text{Rt}\triangle BPF \Rightarrow PA = BF$ ，

因为 $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ 知， $AD \parallel BC$ ，又 $BG \parallel CD$ ，

$\therefore BCDG$ 是平行四边形， $GD = BC = 3$ ， $\therefore AG = 2$ ，

因为 $AB = 4$ ， $BG \perp AF$ ，

$\therefore BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = 2\sqrt{5}$ ，

于是 $\frac{BF}{BG} = \frac{AB^2}{BG^2} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ ，所以 $PA = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ，

又 $CD = BG = 2\sqrt{5}$ ， $CE = \sqrt{5}$ ， $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = 2\sqrt{5}$ ，

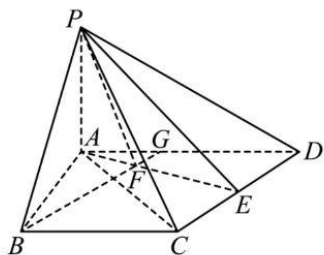
所以 $\tan \angle PEA = \frac{PA}{AE} = \frac{4}{5}$ ，因为 $AC = AD$ ， $PA \perp$ 面 $ABCD$ ， $AC, AD \subset$ 面 $ABCD$ ，

则 $PA \perp AC, PA \perp AD$ ，则 $\sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{PA^2 + AD^2}$ ，即 $PC = PD$ ，

因为 E 为 CD 中点，则 $PE \perp CD$ ，又因为 $AE \perp CD$ ，且 $AE \subset$ 平面 ACD ， $PE \subset$ 平面 PCD ，

则二面角 $P-CD-A$ 的正切值即为 $\tan \angle PEA = \frac{4}{5}$ ，

二面角 $P-CD-A$ 的正弦值是 $\frac{4\sqrt{41}}{41}$.



(1) 求 E 的方程;

(2) 过点 $M(1,0)$

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 共线, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 由双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$, 得 $b^2 = 2a^2$, 再将 $P(2, 2)$ 代入 E 的方程可得 a^2, b^2 , 从而得出 E 的方程:

(2) 联立直线 l 和双曲线方程结合韦达定理得出 $3(x_1+x_2)-2x_1x_2=4$, 再由点 C 坐标得出

$N\left(x_2, \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 2}\right)$, 最后由 k_{MN} 结合 $3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 4$ 可得直线 MN 的斜率为定值 2, 而直线 PM 的斜率也是 2, 从而可得出结论.

【小问1详解】

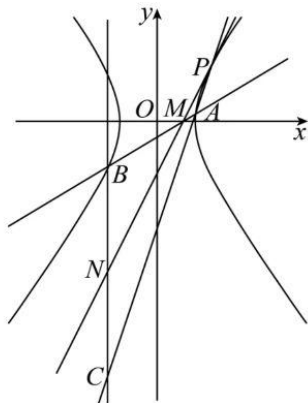
双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$, 即 $c^2=3a^2$, $b^2=2a^2$,

将 $P(2,2)$ 代入 E 的方程可得 $\frac{4}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$, 即 $\frac{4}{a^2} - \frac{4}{2a^2} = 1$, 则 $a^2 = 2, b^2 = 4$,

故 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

【小问2详解】

依题意, 可设直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 2)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.



$y = k(x-1)$ 与 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 联立, 整理得 $(k^2 - 2)x^2 - 2k^2x + k^2 + 4 = 0$,

所以 $k^2 \neq 2$, $\Delta = (2k^2)^2 - 4(k^2 - 2)(k^2 + 4) > 0$, 解得, $k^2 < 4$ 且 $k^2 \neq 2$,

$x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{k^2 - 2}$, $x_1x_2 = \frac{k^2 + 4}{k^2 - 2}$, 所以 $3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 4$. (*)

又 $AP: y = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2}(x - 2) + 2$, 所以 C 的坐标为 $\left(x_2, \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2}(x_2 - 2) + 2\right)$,

由 $y_1 = k(x_1 - 1)$ 可得, $\frac{y_1 - 2}{x_1 - 2}(x_2 - 2) + 2 = \frac{k(x_1 - 1)(x_2 - 2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - 2}$,

从而可得 N 的纵坐标 $y_N = \frac{1}{2} \left[\frac{k(x_1 - 1)(x_2 - 2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - 2} + k(x_2 - 1) \right]$

$= \frac{k[2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 4] + 2(x_1 - x_2)}{2(x_1 - 2)}$,

将 (*) 式代入上式, 得 $y_N = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 2}$, 即 $N\left(x_2, \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 2}\right)$.

所以, $k_{MN} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 1)} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 - 2x_2 - x_1 + 2},$

将(*)式代入上式, 得 $k_{MN} = \frac{2(x_1 - x_2)}{3(x_1 + x_2) - 4x_2 - 2x_1} = 2,$

又 $k_{PM} = \frac{2-0}{2-1} = 2 = k_{MN},$ 直线MN与直线PM有公共点M,

所以P, M, N三点是否共线.

【点睛】关键点睛: 在解决问题二时, 关键在于利用韦达定理得出 $3(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 = 4,$ 建立 x_1, x_2 的关系, 从而得出点N的坐标, 由此得出 $k_{MN} = 2.$

22. 已知函数 $f(x) = x^a e^{ax} + b$ (其中e是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$

处的切线方程是 $y = 36e^6 x - 64e^6,$ $g(x) = 3mx + \ln x.$

(1) 求a, b;

(2) 若 $f(x) - x^2 g(x) \geq x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求m的取值范围.

【答案】(1) $a = 3, b = 0$

(2) $m \in 1$

【解析】

【分析】(1) 求出函数的导数, 根据导数的几何意义列出方程组, 即可求得答案;

(2) 将 $f(x) - x^2 g(x) \geq x^2$ 整理变形, 参变分离, 即 $3m \leq e^{3x} - \frac{\ln x + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$

上恒成立, 由此可构造函数 $F(x) = e^{3x} - \frac{\ln x + 1}{x}, (x > 0)$

, 将不等式恒成立转化为求函数最值问题, 结合导数求解函数 $F(x) = e^{3x} - \frac{\ln x + 1}{x}, (x > 0)$ 的最小值, 即可求得答案.

【小问1详解】

由题意知 $f(x) = x^a e^{ax} + b,$ 故 $f'(x) = ax^{a-1} e^{ax} + x^a \cdot ae^{ax} = ax^{a-1}(x+1)e^{ax},$

则 $f'(2) = 3a \cdot 2^{a-1} e^{2a}, f(2) = 2^a e^{2a} + b,$

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 $y = 36e^6 x - 64e^6,$

$$\text{故} \begin{cases} 3a \cdot 2^{a-1} e^{2a} = 36e^6 \\ 2^a e^{2a} + b = 36e^6 \times 2 - 64e^6 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a \cdot 2^{a-1} e^{2a} = 12e^6 \\ 2^a e^{2a} + b = 8e^6 \end{cases},$$

$$\text{由 } a \cdot 2^{a-1} e^{2a} = 12e^6 > 0, \therefore a > 0,$$

$$\text{令 } h(t) = a \cdot 2^{t-1} e^{2t}, \text{ 则 } h(t) = a \cdot 2^{t-1} e^{2t} \text{ 为 } (0, +\infty) \text{ 上的增函数,}$$

$$\text{而 } h(3) = 3 \cdot 2^2 e^6 = 12e^6, \text{ 即 } a=3 \text{ 为 } a \cdot 2^{a-1} e^{2a} = 12e^6 \text{ 的唯一解,}$$

$$\text{将 } a=3 \text{ 代入 } 2^a e^{2a} + b = 8e^6 \text{ 可得 } b=0,$$

$$\text{即 } a=3, b=0;$$

【小问2详解】

$$\text{由 (1) 可知 } f(x) = x^3 e^{3x}, g(x) = 3mx + \ln x,$$

$$\text{故 } f(x) - x^2 g(x) \geq x^2 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立, 即 } x^3 e^{3x} - x^2 (3mx + \ln x) - x^2 \geq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{即 } xe^{3x} - 3mx - \ln x - 1 \geq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{即 } 3m \leq e^{3x} - \frac{\ln x + 1}{x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{令 } F(x) = e^{3x} - \frac{\ln x + 1}{x}, (x > 0), \text{ 则 } F'(x) = 3e^{3x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{3x^2 e^{3x} + \ln x}{x^2}, \text{ 则 } 3m \leq F(x)_{\min};$$

$$\text{令 } \varphi(x) = 3x^2 e^{3x} + \ln x, (x > 0), \quad \varphi'(x) = 6xe^{3x} + 9x^2 e^{3x} + \frac{1}{x} > 0,$$

$$\text{故 } \varphi(x) = 3x^2 e^{3x} + \ln x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e}{3} + \ln \frac{1}{3} = \frac{e}{3} - \ln 3 < \frac{e}{3} - 1 < 0, \varphi(1) = 3e^3 > 0,$$

$$\text{故存在 } x_0 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right), \text{ 使得 } \varphi(x_0) = 0,$$

$$\text{且 } 0 < x < x_0 \text{ 时, } \varphi(x) < \varphi(x_0) = 0, \text{ 则 } F'(x) < 0, F(x) \text{ 在 } (0, x_0) \text{ 单调递减,}$$

$$x > x_0 \text{ 时, } \varphi(x) > \varphi(x_0) = 0, \text{ 则 } F'(x) > 0, F(x) \text{ 在 } (x_0, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{故 } \forall x \in (0, +\infty), F(x) \geq F(x_0),$$

$$\text{因为 } \varphi(x_0) = 0, \text{ 即 } 3x_0^2 e^{3x_0} + \ln x_0 = 0, \therefore 3x_0^2 e^{3x_0} = -\ln x_0 = \ln \frac{1}{x_0},$$



$$\text{即 } 3x_0 e^{3x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = \left(\ln \frac{1}{x_0} \right) \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}},$$

令 $G(x) = xe^x, (x > 0), G'(x) = (x+1)e^x > 0$, 即 $G(x) = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{而 } 3x_0 e^{3x_0} = \left(\ln \frac{1}{x_0} \right) \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}}, \quad G(3x_0) = G\left(\ln \frac{1}{x_0}\right), \quad \text{且 } x_0 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad \ln \frac{1}{x_0} > 0,$$

$$\text{故 } 3x_0 = \ln \frac{1}{x_0}, \therefore e^{3x_0} = \frac{1}{x_0}, \ln x_0 = -3x_0,$$

$$\text{故 } F(x_0) = e^{3x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{1 - 3x_0}{x_0} = 3, \quad \text{即 } F(x)_{\min} = 3,$$

$$\text{故 } 3m \leq 3, \therefore m \leq 1$$

【点睛】难点点睛：本题综合考查了导数的应用问题，解答时要熟练掌握导数的相关知识并能灵活应用，解答的难点在于解决不等式恒成立问题时，要根据不等式的变形分离参数，从而构造函数，转化为函数的最值问题，在求解函数的最值过程中，要注意隐零点的问题。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线