绝密★启用前（全国卷）

理科数学参考答案

1.【答案】B

【解析】$z=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(\mathrm{i}-1)(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，$|\bar{z}-\mathrm{i}|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.【答案】C

【解析】$M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|x<3\}$，所以$M\cap N=\{x|-1<x<3\}$.

3.【答案】A

【解析】因为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为单位向量，所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=5-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，所以

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

4.【答案】B

【解析】x的系数为$\mathrm{C}_5^5\times\mathrm{C}_5^2\times(-2)^2\times(-1)^0+\mathrm{C}_5^3\times\mathrm{C}_3^1\times(-2)^1\times(-1)^2+\mathrm{C}_5^1\times(-2)^0\times(-1)^4=-15$.

5.【答案】A

【解析】因为$\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{1}{2}$，则$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=\dfrac{f(1)\times(1-\frac{1}{2^{10}})}{1-\frac{1}{2}}=2f(1)\times(1-\dfrac{1}{2^{10}})$，

$$f(11)+f(12)+\cdots+f(30)=\dfrac{f(11)\times(1-\frac{1}{2^{20}})}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{f(1)}{2^9}\times(1-\dfrac{1}{2^{20}}),$$

所以$\dfrac{f(1)+f(2)+\cdots+f(10)}{f(11)+f(12)+\cdots+f(30)}=\dfrac{2^{10}(1-\frac{1}{2^{10}})}{(1+\frac{1}{2^{10}})(1-\frac{1}{2^{10}})}=\dfrac{2^{20}}{2^{10}+1}$.

6.【答案】D

【解析】只有当$a\perp b$时才存在平面α，β，使$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且$c/\!/\alpha$，$c/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$，故A错误；若存在平面α，β，使$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且$c/\!/\alpha$，$c/\!/\beta$，则此时α与β不平行，故B错误；存在两个平面γ，使$c\subset\gamma$，且a，b与γ所成角相等，故C错误；存在平面γ，使$a/\!/\gamma$，$b/\!/\gamma$，且$c\perp\gamma$，故D正确.

7.【答案】C

【解析】当列车行驶的距离为s时，车轮转过的角度为$\dfrac{s}{R}$，此时P到铁轨上表面的距离为

$$R-R\cos\dfrac{s}{R}=R(1-\cos\dfrac{s}{R}).$$

8.【答案】C

【解析】**方法 1**：由 $x^2+y^2=2x$，得 $(x-1)^2+y^2=1$，表示圆心坐标为 $(1,0)$，半径为 1 的圆，且 $\frac{y}{x+2}$ 的几何意义为过点 $(-2,0)$ 和该圆上一点的直线的斜率，所以当该直线与圆相切于第一象限时 $\frac{y}{x+2}$ 的值最大，由几何关系可知最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

方法 2：设 $y=k(x+2)(x\neq -2)$，代入 $x^2+y^2=2x$ 并化简得

$(1+k^2)x^2+2(2k^2-1)x+4k^2=0$，由 $\Delta=4(2k^2-1)^2-16k^2(1+k^2)\geqslant 0$ 解得

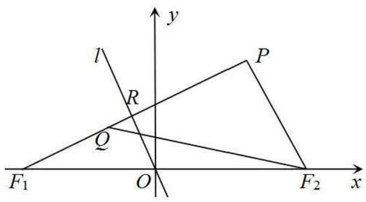
$k\in[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

9.【答案】D

【解析】$S_7=7a_4<0$，$a_4<0$，因为 $a_7>0$，所以 a_5，a_6 的符号不确定，而 $a_3<0$，$a_8>0$，所以 a_3+a_6，a_5+a_8 的符号不确定；$S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=3a_6$，若 $a_6<0$，则 $S_7<S_4$；设公差为 d，则 $d>0$，所以 $S_{14}-3a_9=7(a_7+a_8)-3a_9=11a_7+d>0$.

10.【答案】B

【解析】如图，设 F_1P 与渐近线 l 交于点 R，O 为坐标原点，则 R 为线段 F_1P 的中点，由三角形中位线定理可知 $l\parallel PF_2$，又因为 $PF_1\perp l$，所以 $F_1P\perp F_2P$. 由点到直线距离公式得 $|F_1R|=b$，所以 $|F_1P|=2b$，$|F_2P|=2b-2a$，$(2b)^2+(2b-2a)^2=|F_1F_2|^2=4a^2+4b^2$，故 $b=2a$，$|F_1P|=4a$，$|F_2P|=2a$，设 $|F_1Q|=m$，则 $|PQ|=4a-m$，$|F_2Q|=m+2a$，在直角 $\triangle PQF_2$ 中有，$|PQ|^2+|F_2P|^2=|F_2Q|^2$，即 $(4a-m)^2+4a^2=(m+2a)^2$，则 $m=\frac{4}{3}a$，$|F_2Q|=\frac{10}{3}a$，所以 $\sin\angle F_2QP=\frac{|F_2P|}{|F_2Q|}=\frac{3}{5}$.



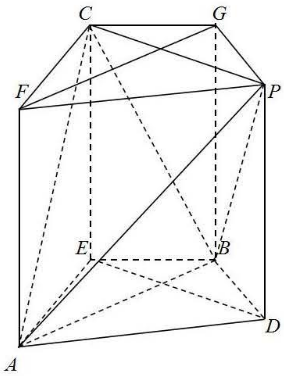
11.【答案】D

【解析】设 $g(x)=xf(x)$，则 $g(1)=f(1)=1$，$g'(x)=f(x)+xf'(x)$，因为 $-\frac{1}{x}<f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调递减，且 $1+xf'(x)>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>f(1)=1$，$g'(x)>1+xf'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，故 $g(\ln 2)=\ln 2 f(\ln 2)<g(1)=1$，即 $f(\ln 2)<\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e$；

$g(\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\pi}f(\frac{1}{\pi})<g(1)=1$，即 $f(\frac{1}{\pi})<\pi$；由于 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(\lg 2)>f(1)=1>\frac{2}{\mathrm{e}}$；

$g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})<g(1)=1$，即 $f(\frac{1}{2})<2<\mathrm{e}$，故 D 正确.

12.【答案】A



【解析】每个底面四个顶点共圆的直四棱柱的所有顶点必在同一球面上，如图，假设由三棱锥 $P-ABC$ 可以补成一个直四棱柱 $ADBE-FPGC$，且底面四边形 $ADBE$ 存在外接圆，因为 $AC=PA$，$BC=PB$，所以 $AE=AD$，$BE=BD$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle ABD$，$\angle AEB=\angle ADB$，且 $\angle AEB+\angle ADB=180^\circ$，所以 $\angle AEB=\angle ADB=90^\circ$，$AB$ 为四边形 $ADBE$ 的外接圆直径. 设四棱柱的侧棱长为 h，则 $AE^2=11-h^2$，$BE^2=9-h^2$，所以 $AE^2+BE^2=20-2h^2=AB^2=4$，$h=2\sqrt{2}$，所以 $AE=AD=\sqrt{3}$，$BE=BD=1$，所以 $\angle BAE=\angle BAD=30^\circ$，$\angle EAD=60^\circ$，$\triangle ADE$ 是等边三角形，$DE=AE=\sqrt{3}=PC$，故假设成立，所以四边形 $ABGF$ 的两条对角线的交点即为所在球的球心. 易知球半径 $R=\sqrt{3}$，所以球的体积为 $\frac{4\pi R^3}{3}=4\sqrt{3}\pi$.

13.【答案】$y=3\mathrm{e}(x-1)$

【解析】当 $x=1$ 时，$y=\mathrm{e}-a=0$，故 $a=\mathrm{e}$，$C:y=x\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}}{x}$，因为 $y'=(x+1)\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}}{x^2}$，所以当 $x=1$ 时，$y'=3\mathrm{e}$，所以曲线 C 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=3\mathrm{e}(x-1)$.

14.【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】**方法 1：** 多面体 A_1C_1-AEFC 的体积等于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积与三棱台 $EBF-A_1B_1C_1$ 的体积之差，其中三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，三棱台 $EBF-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{7}{3}$，所以多面体 A_1C_1-AEFC 的体积为 $\frac{5}{3}$.

方法 2： 所求体积为 $V_{A_1-AEF}+V_{F-ACC_1A_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot AA_1+\frac{1}{3}S_{ACC_1A_1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.

15.【答案】$\frac{13}{15}$

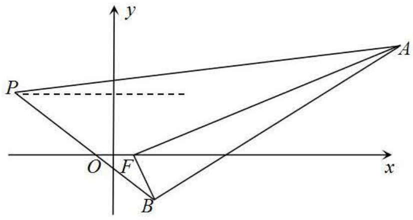
【解析】设事件M为A灯亮，事件N为B灯亮，事件X为开关甲闭合，事件Y为开关乙闭合，事件Z为开关丙闭合，则$P(N|M)=\dfrac{P(NM)}{P(M)}$，

其中$P(NM)=P(X)+P(\overline{X})P(Y)P(Z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{24}$，

$P(M)=P(X\cup Z)=P(X)+P(Z)-P(X)P(Z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$，

所以$P(N|M)=\dfrac{13}{15}$.

16.【答案】108



【解析】如图，易知C的焦点为$F(1,0)$，显然当$AB\perp x$轴时，AF不垂直于BF，设过点$(7,0)$的直线l的斜率为$k(k>0)$．则$l:y=k(x-7)$，将$y=k(x-7)$代入$y^2=4x$，得$k^2(x-7)^2=4x$，即$k^2x^2-2(7k^2+2)x+49k^2=0$．设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{2(7k^2+2)}{k^2}$，$x_1x_2=49$，

$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，所以$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$，解得$k^2=\dfrac{1}{2}$.

设PA，PB与x轴正方向的夹角分别为α，β，由抛物线的光学性质可知$\angle APB=\alpha+\beta$，$\angle AFB=2\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$，故$\angle APB=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，且由圆的性质可知$\angle AQB=2\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\triangle QAB$是等腰直角三角形，其中$|AQ|=|BQ|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|AB|$，且$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=12\sqrt{3}$，故

$S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}|AQ|\cdot|BQ|=\dfrac{|AQ|^2}{2}=\dfrac{|AB|^2}{4}=108$.

17.（12分）

【解析】(1) 设内角A，B，C的对边分别为a，b，c，

由正弦定理可知$2a=c$， ……1分

由余弦定理可知$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{5a^2-b^2}{4a^2}=\dfrac{11}{16}$. ……3分

解得$b=\dfrac{3}{2}a$， ……4分

又因为$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$， ……5分

所以由正弦定理可知 $\sin A=\dfrac{2}{3}\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. ……6 分

（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的半径分别为 R ，r ，

由（1）及正弦定理可知 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$，故 $R=\dfrac{4\sqrt{15}a}{15}$， ……8 分

由三角形面积公式可知：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{bc\sin A}{2}=\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{16}$， ……9 分

且 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=\dfrac{9}{2}a$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}ar=\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{16}$，故 $r=\dfrac{\sqrt{15}a}{12}$， ……11 分

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的面积之比为 $\dfrac{\pi R^2}{\pi r^2}=(\dfrac{R}{r})^2=\dfrac{256}{25}$. ……12 分

18.（12 分）

【解析】（1）根据列联表得：$K^2=\dfrac{180\times(45\times30-60\times45)^2}{90\times90\times105\times75}=\dfrac{36}{7}\approx5.143<6.635$， ……3 分

所以没有 99%的把握认为学生每周平均运动时长与性别有差异. ……4 分

（2）男生中每周平均运动时长不少于 7 小时的比率为 $p_1=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$，女生中每周平均运动时长不少于 7 小时的比率为 $p_2=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$，则 $X\sim B(2,\dfrac{1}{2})$，$Y\sim B(2,\dfrac{1}{3})$，

所以 $E(X)=2\times\dfrac{1}{2}=1$，$E(Y)=2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$， ……5 分

根据题意可知 $Z=-2,-1,0,1,2$，

$P(Z=-2)=P(X=0)P(Y=2)=(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{36}$， ……6 分

$P(Z=-1)=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=2)=(\dfrac{1}{2})^2\times C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{6}$，

……7 分

$$P(Z=0)=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(X=2)$$
$$=(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{2}{3})^2+C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{13}{36},$$

$P(Z=1)=P(X=1)P(Y=0)+P(X=2)P(Y=1)=C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2}{3})^2+(\dfrac{1}{2})^2\times C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，

……8 分

$P(Z=2)=P(X=2)P(Y=0)=(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{9}$， ……9 分

所以 $E(Z)=(-2)\times\dfrac{1}{36}+(-1)\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{13}{36}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$， ……11 分

所以 $E(Z)=E(X)-E(Y)$． ……12 分

19.（12 分）

【解析】（1）**方法 1：** 连接 B_1C，延长 B_1D，BA 交于点 E，连接 CE，

则 $B_1C\perp BC_1$，$BC\perp CE$， ……2 分

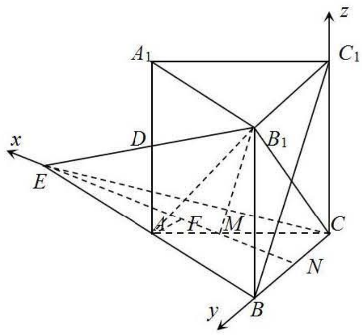
因为 $CC_1\perp$ 平面 BCE，

所以 $CC_1\perp CE$，$CE\perp$ 平面 BCC_1B_1， ……3 分

因为 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $EC\perp BC_1$，$BC_1\perp$ 平面 B_1CE， ……4 分

因为 $B_1D\subset$ 平面 B_1CE，



所以 $B_1D\perp BC_1$． ……5 分

方法 2： 由条件得 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，$\overrightarrow{AA_1}^2=\overrightarrow{AB}^2$，

……2 分

所以 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}^2-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB})+$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}^2=0$， ……4 分

所以 $B_1D\perp BC_1$． ……5 分

方法 3： 连接 B_1C，延长 B_1D，BA 交于点 E，连接 CE，以 C 为坐标原点，CE 为 x 轴，CB 为 y 轴，CC_1 为 z 轴建立如图示的空间直角坐标系 $C-xyz$，设 $|\overrightarrow{AB}|=2$，则 $D(\sqrt{3},1,1)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(0,0,2)$， ……2 分

所以 $\overrightarrow{DB_1}=(-\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,2)$， ……3 分

所以 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，即 $B_1D\perp BC_1$． ……5 分

（2）在（1）的条件下，若 B_1，D，M，N 在同一平面上，则 E，M，N 在同一直线上，……6 分

过 A 作 $AF\,//\,BC$，交 EN 于 F，设 $BC=2$，$NC=k$，则 $AF=\frac{1}{2}BN=\frac{2-k}{2}$，

所以 $S_{\triangle ANC}=\frac{k}{2}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CMN}=\dfrac{k}{\frac{2-k}{2}+k}S_{\triangle ANC}$，

所以$S_{\triangle CMN}=\dfrac{k^2}{2+k}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，解得$k=1$，则$NC=1$，$CM=\dfrac{4}{3}$. ……8 分

以C为坐标原点，CE为x轴，CB为y轴，CC_1为z轴建立坐标系，则$A(\sqrt{3},1,0)$，

$M(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3},0)$，$N(0,1,0)$，$B_1(0,2,2)$，

所以$\overrightarrow{MA}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{3},0)$，$\overrightarrow{MB_1}=(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{4}{3},2)$，$\overrightarrow{MN}=(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{3},0)$， ……9 分

设平面AMB_1与平面B_1MN的法向量分别为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1+\dfrac{1}{3}y_1=0\\-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x_1+\dfrac{4}{3}y_1+2z_1=0\end{cases},\quad\begin{cases}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x_2+\dfrac{1}{3}y_2=0\\-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x_2+\dfrac{4}{3}y_2+2z_2=0\end{cases},$$

不妨取$x_1=1$，$x_2=1$，则$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=(1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$， ……10 分

所以$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1\times1-\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+3}\times\sqrt{1+12+3}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

故二面角$A-B_1M-N$的正弦值为$\sqrt{1-(-\dfrac{2\sqrt{7}}{7})^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……12 分

20.（12 分）

【解析】（1）根据题意有，$B(0,1)$，设$F(c,0)$，则$\overrightarrow{FB}=(-c,1)$，$\overrightarrow{FP}=(2-c,1)$， …1 分

当$PF\perp BF$时，$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FB}=-c(2-c)+1=0$， ……2 分

所以$c=1$， ……3 分

根据椭圆的几何性质可知$a^2=1+c^2=2$，

所以C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……4 分

（2）设MN的方程为$y=k(x-2)+1$，代入C的方程有：

$(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+2(2k-1)^2-2=0$， ……5 分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{4k(2k-1)}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2(2k-1)^2-2}{2k^2+1}=\dfrac{8k(k-1)}{2k^2+1}$， ……6 分

直线MF的方程为$y_1x+(1-x_1)y-y_1=0$，直线NF的方程为$y_2x+(1-x_2)y-y_2=0$，

所以点B到直线MF，NF的距离分别为$d_1=\dfrac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}}$，$d_2=\dfrac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{(x_2-1)^2+y_2^2}}$，若直

线 BF 平分 $\angle MFN$，只需满足 $d_1=d_2$， ……8 分

即 $[(x_1-1)+y_1]^2[(x_2-1)^2+y_2^2]=[(x_2-1)+y_2]^2[(x_1-1)^2+y_1^2]$，

整理化简有 $(x_1-1)(x_2-1)^2y_1+(x_1-1)y_1y_2^2=(x_2-1)(x_1-1)^2y_2+(x_2-1)y_2y_1^2$，

即 $(x_1-1)(x_2-1)[(x_2-1)y_1-(x_1-1)y_2]=y_1y_2[(x_2-1)y_1-(x_1-1)y_2]$，

故只需满足 $(x_1-1)(x_2-1)=y_1y_2$， ……10 分

其中 $(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\dfrac{8k(k-1)}{2k^2+1}-\dfrac{4k(2k-1)}{2k^2+1}+1=\dfrac{2k^2-4k+1}{2k^2+1}$， ……11 分

$y_1y_2=(kx_1+1-2k)(kx_2+1-2k)=k^2x_1x_2+k(1-2k)(x_1+x_2)+(1-2k)^2=\dfrac{2k^2-4k+1}{2k^2+1}$，

故 $(x_1-1)(x_2-1)=y_1y_2$，$d_1=d_2$，直线 BF 平分 $\angle MFN$． ……12 分

21．（12 分）

【解析】（1）**方法 1**：根据题意有 $\dfrac{2x}{x+1}\geqslant 0$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$，……1 分

当 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}>0$， ……2 分

所以 $f(x)$ 有两个单调递增区间，分别是 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$． ……3 分

方法 2：根据题意有 $\dfrac{2x}{x+1}\geqslant 0$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$， ……1 分

$f(x)=\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}}$，且 $y=2-\dfrac{2}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$ 单调递增，$y=\sqrt{x}$ 为增函数，…2 分

所以 $f(x)$ 有两个单调递增区间，分别是 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$． ……3 分

（2）因为 $g(x)$ 是偶函数，故 $-\dfrac{1}{4}<g(x)<1$ 等价于当 $x>0$ 时，$-\dfrac{x}{4}<\sin x<x$，

设 $h(x)=\sin x-x$，则 $h'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，$h(x)$ 单调递减， ……4 分

所以当 $x>0$ 时，$h(x)<h(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$\sin x<x$． ……5 分

设 $\varphi(x)=\sin x+\dfrac{x}{4}$，当 $0<x\leqslant\pi$ 时，$\varphi(x)>0$，

当 $x\geqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\varphi(x)\geqslant\sin x+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3\pi}{2}>\sin x+1\geqslant 0$， ……6 分

当 $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)=\cos x+\dfrac{1}{4}$ 是增函数，且 $\varphi'(\dfrac{4\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}<0$，$\varphi'(\dfrac{3\pi}{2})=\dfrac{1}{4}>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$，使得 $\varphi'(x_0)=\cos x_0+\frac{1}{4}=0$，即 $\cos x_0=-\frac{1}{4}$，

当 $\pi<x<x_0$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，当 $x_0<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)=\sin x_0+\frac{x_0}{4}=-\sqrt{1-\cos^2 x_0}+\frac{x_0}{4}>\frac{1}{4}\times\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{15}}{4}>0$.

综上，$-\frac{1}{4}<g(x)<1$. ……8 分

（3）由 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=f(x_n)=\sqrt{\frac{2x_n}{x_n+1}}$ 易知 $x_n>0$，

故 $\frac{1}{x_{n+1}^2}=\frac{x_n+1}{2x_n}=\frac{1}{2x_n}+\frac{1}{2}$，即 $2(\frac{1}{x_{n+1}})^2=\frac{1}{x_n}+1$，其中 $\frac{1}{x_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$， ……9 分

又因为 $2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}+1$，且由（1）可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以当且仅当 $\frac{1}{x_n}=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 时，即 $x_n=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ 时，$x_{n+1}=f(x_n)$ 成立， ……10 分

所以 $x_1x_2\cdots x_n=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdots\cos\frac{\pi}{2^2}}$

$=\frac{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2}}=2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. ……11 分

由（2）可知，当 $x>0$ 时，$\sin x<x$，故 $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}<\frac{\pi}{2^{n+1}}$，

所以 $x_1x_2\cdots x_n=2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}<2^n\times\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{\pi}{2}$. ……12 分

22.【解析】(10 分)

（1）C 的普通方程为 $(y+2)^2=4x$， ……2 分

其中 $x\geqslant1$，$y\geqslant0$. ……3 分

$\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=1=\sqrt{2}\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=y-x=1$.

所以 l 的直角坐标方程为 $y=x+1$. ……5 分

（2）设 C 上的点到 l 距离为 d，由（1）可知，

$d=\frac{\left|\frac{1}{4}(t^2+\frac{1}{t^2})^2-(t-\frac{1}{t})^2+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{1}{4}(t^2+\frac{1}{t^2})^2-(t^2+\frac{1}{t^2})+3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|(t^2+\frac{1}{t^2}-2)^2+8\right|}{4\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{2}$， ……9 分

当 $t=\pm1$ 时，等号成立.

所以 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{2}$. ……10 分

23.【解析】(10 分)

（1）根据题意有 $|1-m+n|\leqslant 1$，$|1+m+n|\leqslant 1$，$f(0)=n$，

所以 $-1\leqslant 1-m+n\leqslant 1$，即 $-2\leqslant -m+n\leqslant 0$，①

$-1\leqslant 1+m+n\leqslant 1$，即 $-2\leqslant m+n\leqslant 0$，② ……2 分

由①可知 $n\leqslant m$， ……3 分

①+②有 $-4\leqslant 2n$，即 $-2\leqslant n$， ……4 分

由①可知，$0\leqslant m-n\leqslant 2$，③

②+③有 $2m\leqslant 2$，即 $m\leqslant 1$，

综上，$-2\leqslant f(0)\leqslant m\leqslant 1$. ……5 分

（2）**方法 1**：由①② 得 $0\leqslant m^2-2mn+n^2\leqslant 4$④，

$0\leqslant m^2+2mn+n^2\leqslant 4$⑤. ……7 分

由④得 $-4\leqslant -m^2-n^2+2mn\leqslant 0$⑥，……8 分

⑤+⑥得 $-4\leqslant 4mn\leqslant 4$，即 $|mn|\leqslant 1$. ……10 分

方法 2：由②，③可知，$(m+n)^2=m^2+n^2+2mn\leqslant 4$，

$(m-n)^2=m^2+n^2-2mn\leqslant 4$， ……6 分

所以 $m^2+n^2\leqslant 4$. ……7 分

且有 $m^2+n^2-4\leqslant 2mn\leqslant 4-(m^2+n^2)$，即 $2|mn|\leqslant 4-(|m|^2+|n|^2)$， ……9 分

所以 $4\geqslant 2|mn|+|m|^2+|n|^2\geqslant 4|mn|$，即 $|mn|\leqslant 1$. ……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。