

# 数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x \leq 1\}$ ， $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ，则  $A \cap B$  的子集个数为

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 6

2. 若复数  $z = \frac{2}{1+i}$ ，则  $|z-i| =$

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C. 4                      D. 5

3. 甲、乙两人在 5 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数，则下列结论正确的是

甲		乙
9 8	1	7 9
8 7 3	2	1 3 5

- A. 在这 5 天中，甲、乙两人加工零件数的极差相同
- B. 在这 5 天中，甲、乙两人加工零件数的中位数相同
- C. 在这 5 天中，甲日均加工零件数大于乙日均加工零件数
- D. 在这 5 天中，甲加工零件数的方差小于乙加工零件数的方差

4. 曲线  $y = x^3 + 1$  在点  $(-1, a)$  处的切线方程为  
 A.  $y = 3x + 3$     B.  $y = 3x + 1$     C.  $y = -3x - 1$     D.  $y = -3x - 3$

5.  $(x+3y)(x-2y)^6$  的展开式中  $x^5y^2$  的系数为  
 A. 60    B. 24    C. -12    D. -48

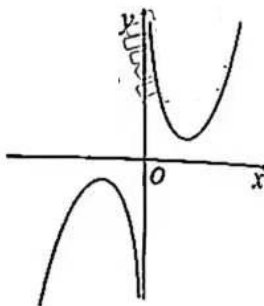
6. 若函数  $y = f(x)$  的大致图像如图, 则  $f(x)$  的解析式可能是

A.  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^{2x} + 1}$

B.  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{x^2 e^x}$

C.  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^{2x} - 1}$

D.  $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2 e^x}$



7. 设抛物线  $E: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 过点  $M(4, 0)$  的直线与  $E$  相交于  $A, B$  两点, 与  $E$  的准线相交于点  $C$ , 点  $B$  在线段  $AC$  上,  $|BF| = 3$ , 则  $\triangle BCF$  与  $\triangle ACF$  的面积

之比  $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} =$

- A.  $\frac{1}{4}$     B.  $\frac{1}{5}$     C.  $\frac{1}{6}$     D.  $\frac{1}{7}$

8. 若正实数  $a, b$  满足  $a > b$ , 且  $|\ln a| \ln b > 0$ , 则下列不等式一定成立的是

- A.  $\log_a b < 0$     B.  $a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$     C.  $2^{ab+1} < 2^{a+b}$     D.  $a^{b-1} < b^{a-1}$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分。

9. 已知直线  $l: x + y - \sqrt{2} = 0$  与圆  $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ , 则

- A. 直线  $l$  与圆  $C$  相离  
 B. 直线  $l$  与圆  $C$  相交  
 C. 圆  $C$  上到直线  $l$  的距离为 1 的点共有 2 个  
 D. 圆  $C$  上到直线  $l$  的距离为 1 的点共有 3 个

10. 将函数  $y = \sin 2x$  的图像向右平移  $\varphi$  个单位, 得到函数  $y = f(x)$  的图像, 则下列说法正确的是

- A. 若  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , 则  $y = f(x)$  是偶函数
- B. 若  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , 则  $y = f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递减
- C. 若  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , 则  $y = f(x)$  的图像关于点  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  对称
- D. 若  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , 则  $y = f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增

11. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2$ ,  $AA_1=3$ ,  $AD=4$ , 则下列命题为真命题的是

- A. 若直线  $AC_1$  与直线  $CD$  所成的角为  $\varphi$ , 则  $\tan \varphi = \frac{5}{2}$
- B. 若经过点  $A$  的直线  $l$  与长方体所有棱所成的角相等, 且  $l$  与面  $BCC_1B_1$  交于点  $M$ , 则  $AM = \sqrt{29}$
- C. 若经过点  $A$  的直线  $m$  与长方体所有面所成的角都为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. 若经过点  $A$  的平面  $\beta$  与长方体所有面所成的二面角都为  $\mu$ , 则  $\sin \mu = \frac{\sqrt{6}}{3}$
12. 十九世纪下半叶集合论的创立, 奠定了现代数学的基础, 著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物, 具有典型的分形特征. 其操作过程如下: 将闭区间  $[0, 1]$  均分为三段, 去掉中间的区间段  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , 记为第 1 次操作; 再将剩下的两个区间  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  分别均分为三段, 并各自去掉中间的区间段, 记为第 2 次操作;  $\dots$ : 每次操作都在上一次操作的基础上, 将剩下的各个区间分别均分为三段, 同样各自去掉中间的区间段; 操作过程不断地进行下去, 剩下的区间集合即是“康托三分集”. 若第  $n$  次操作去掉的区间长度记为  $\varphi(n)$ , 则

- A.  $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{3}{2}$
- B.  $\ln[\varphi(n)] + 1 < 0$
- C.  $\varphi(n) + \varphi(3n) > 2\varphi(2n)$
- D.  $n^2\varphi(n) \leq 64\varphi(8)$

数学试题 A 第 3 页 (共 6 页)

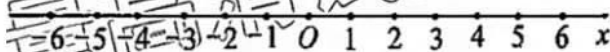
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 点  $P$  在  $BC$  边上 (包括端点), 则  $\overline{AD} \cdot \overline{AP}$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

15. 已知三棱锥  $P-ABC$  的棱  $AP, AB, AC$  两两互相垂直,  $AP = AB = AC = \sqrt{2}\sqrt{3}$ . 以顶点  $P$  为球心, 4 为半径作一个球, 球面与该三棱锥的表面相交得到四段弧, 则最长弧的弧长等于 \_\_\_\_\_.

16. 如图, 在数轴上, 一个质点在外力的作用下, 从原点  $O$  出发, 每次等可能地向左或向右移动一个单位, 共移动 6 次, 则事件“质点位于  $-2$  的位置”的概率为 \_\_\_\_\_.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1, a_2, a_3$  分别是下表第一, 二, 三行中的某一个数, 且  $a_1, a_2, a_3$  中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	3
第二行	4	6	5
第三行	9	12	8

(1) 写出  $a_1, a_2, a_3$  并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = a_n + (-1)^n \log_2 a_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\triangle ABC$  的面积为

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - b^2\right) \sin C.$$

(1) 证明:  $\sin A = 2 \sin B$ ;

(2) 若  $a \cos C = \frac{3}{2}b$ , 求  $\cos A$ .

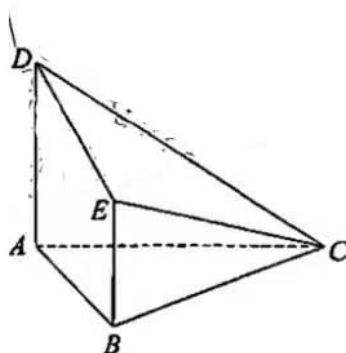
数学试题 A 第 4 页 (共 6 页)

19. (12分)

如图,在五面体  $ABCDE$  中,  $AD \perp$  平面  $ABC$ ,  $AD \parallel BE$ ,  $AD = 2BE$ ,  $AB = BC$ .

(1) 求证: 平面  $CDE \perp$  平面  $ACD$ ;

(2) 若  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 2$ , 五面体  $ABCDE$  的体积为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求直线  $CE$  与平面  $ABED$  所成角的正弦值.



20. (12分)

人们用大数据来描述和定义信息时代产生的海量数据, 并利用这些数据处理事务和做出决策. 某公司通过大数据收集到该公司销售的某电子产品 1 月至 5 月的销售量如下表.

月份 $x$	1	2	3	4	5
销售量 $y$ (万件)	4.9	5.8	6.8	8.3	10.2

该公司为了预测未来几个月的销售量, 建立了  $y$  关于  $x$  的回归模型:  $\hat{y} = \hat{a}x^2 + \hat{b}x$

(1) 根据所给数据与回归模型, 求  $y$  关于  $x$  的回归方程 ( $\hat{a}$  的值精确到 0.1).

(2) 已知该公司的月利润  $z$  (单位: 万元) 与  $x, y$  的关系为  $z = 24\sqrt{x} - \frac{5y+2}{\sqrt{x}}$ .

根据 (1) 的结果, 问该公司哪一个月的月利润预报值最大?

参考公式: 对于一组数据  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 其回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  的斜

率和截距的最小二乘估计公式分别为  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .

21. (12分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(-2,0)$ ,  $B(2,0)$ , 点  $M$  满足直线  $AM$  与直线  $BM$  的斜率之积为  $-\frac{3}{4}$ , 点  $M$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 已知点  $F(1,0)$ , 直线  $l: x=4$  与  $x$  轴交于点  $D$ , 直线  $AM$  与  $l$  交于点  $N$ , 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $\angle MFD = \lambda \angle NFD$ ? 若存在, 求  $\lambda$  的值; 若不存在, 说明理由.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x + \sin x - \cos x$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数.

(1) 证明: 当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) \geq 2$ .

(2) 设  $g(x) = f(x) - 2x - 1$ , 证明:  $g(x)$  有且仅有 2 个零点.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

