

姓名 班级 考号 订 要 不 装 内 封 封 弥 弥

绝密★启用前

广东省 2021 届普通高中学业质量联合测评 数学试卷

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | 0 \leq x < 5\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x | -1 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 3 \leq x < 5\}$
2. 已知复数 $z_1 = 1 + i$, 复数 z_2 满足 $z_1 z_2 = 3 - i$, 则 z_2 的虚部为
A. $2i$ B. $-2i$ C. 2 D. -2
3. 已知 α 是第二象限的角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$
A. $-\frac{24}{7}$ B. $\frac{24}{7}$ C. $-\frac{24}{25}$ D. $\frac{24}{25}$
4. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 3$, $S_4 = 15$, 则 $a_5 =$
A. 16 B. 12 C. 8 D. 4
5. 在某场新冠肺炎疫情视频会议中,甲、乙、丙、丁、戊五位疫情防控专家轮流发言,其中甲必须排在前两位,丙、丁必须排在一起,则这五位专家的不同发言顺序共有
A. 8 种 B. 12 种 C. 20 种 D. 24 种
6. 我国古代数学名著《九章算术》中有如下问题:“今有木长二丈,围之三尺,葛生其下,缠木七周,上与木齐.问葛长几何? 术曰:以七周乘三尺为股,木长为勾,为之求弦.弦者,葛之长”.意思是:今有 2 丈长的圆木,其横截面周长 3 尺,葛藤从圆木底端绕圆木 7 周至顶端,问葛藤有多长? 九章算术还有解释:七周乘以三尺为股(直角三角形较长的直角边),木棍的长为勾(直角三角形较短的直角边),葛的长为弦(直角三角形的斜边)(注:1 丈 = 10 尺)
A. 29 尺 B. 27 尺 C. 23 尺 D. 21 尺
7. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $\vec{EC} = 2\vec{DE}$, $\vec{FC} = 2\vec{BF}$, $\vec{FG} = 2\vec{GE}$, 则 $\vec{AG} =$
A. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{8}{9}\vec{AD}$ B. $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$
C. $\frac{8}{9}\vec{AB} + \frac{7}{9}\vec{AD}$ D. $\frac{4}{9}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$
8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 作 $AM \perp l, BN \perp l$, 垂足分别为 M, N , 若 $|MF| = 4, |NF| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 则 $|AB| =$
A. $\frac{10}{3}$ B. 4 C. 5 D. $\frac{16}{3}$

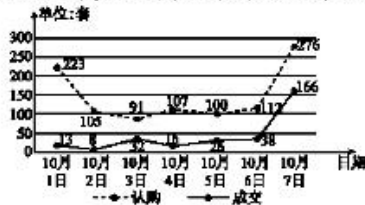
高三大联考·数学 第 1 页 (共 4 页)

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得3分,有选错的得0分。

9. 已知 $0 < a < b < 1$, 下列不等式成立的是

- A. $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{3}\right)^b$ C. $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$ D. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{a} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{b}$

10. 如图为某市2020年国庆节7天假期的楼房认购量与成交量的折线图, 小明同学根据折线图对这7天的认购量(单位:套)与成交量(单位:套)作出如下判断, 则判断错误的是



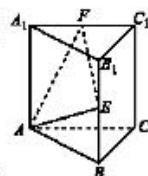
- A. 日成交量的中位数是16
B. 日成交量超过日平均成交量的有2天
C. 10月7日认购量的增幅大于10月7日成交量的增幅
D. 日认购量的方差大于日成交量的方差

11. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1$, 且 $f(x)$ 在

$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调, 则下列结论正确的是

- A. $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心
B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
D. 先将 $y = \sin x$ 的图象的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到 $f(x)$ 的图象

12. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=CC_1=6$, $AC \perp BC$, E, F 分别为 BB_1, A_1C_1 的中点, 过点 A, E, F 作三棱柱的截面 α , 则下列结论中正确的是



- A. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为 106π
B. $BC_1 \parallel \alpha$
C. 若 α 交 B_1C_1 于 M , 则 $EM = \sqrt{13}$
D. α 将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 分成体积较大部分和体积较小部分的体积比为 $13:5$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知正实数 m, n 满足 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$, 则 $m+4n$ 的最小值为_____。

14. 已知 $\left(x + \frac{1}{x}\right)(ax+1)^3$ 的所有项的系数的和为64, 则 $a =$ _____, 展开式中 x^2 项的系数为_____。(本题第一空2分, 第二空3分)

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 以 OF (O 为坐标原点) 为直径的圆与双曲线的两渐近线分别交于 A, B 两点(不同于原点), 若 $\triangle OAB$ 的面积等于 $\frac{1}{8}ab$, 则双曲线 C 的离心率为_____。

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 6, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - mx + 2$ 有四个零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在条件 ① $\cos A \cos B + \cos C = 2 \sin A \cos B$, ② $b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$, ③ $a \sin^2 \frac{A+B}{2} + c \sin^2 \frac{B+C}{2} = \frac{5}{4}b$ 中任选一个, 补充到下面问题中, 并给出问题解答。

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, a = 2\sqrt{5}, b = 2c$, _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n+1)a_n = n^2 + 2n + k$, 数列 $\{|\log_2 b_n|\}$ 是以 1 为首项, 公差为 1 的等差数列。

(1) 求 a_n 和 b_n ;

(2) 若 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

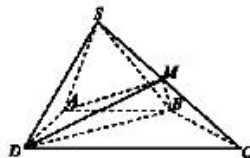
19. (本小题满分 12 分)

如图所示, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AD \perp DC, CD = 2AD = 2AB = 4, SA = SB = SD = \sqrt{6}$ 。

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 SBD ;

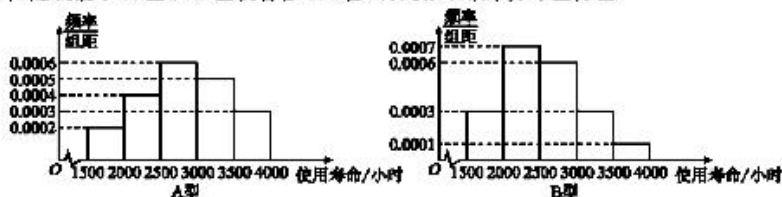
(2) 若点 M 是线段 SC 上的动点, 平面 MAB 与平面 SBD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{58}}{29}$,

求 AM 。



20. (本小题满分 12 分)

为落实十三五规划节能减排的国家政策, 某职能部门对市场上两种设备的使用寿命进行调查统计, 随机抽取 A 型和 B 型设备各 100 台, 得到如下频率分布直方图:



高三大联考·数学第 3 页 (共 4 页)

(1)将使用寿命超过 2500 小时和不超过 2500 小时的台数填入下面的列联表:

	超过 2500 小时	不超过 2500 小时	总计
A 型			
B 型			
总计			

根据上面的列联表,能否有 99%的把握认为使用寿命是否超过 2500 小时与型号有关?

(2)用分层抽样的方法从不超过 2500 小时 A 型和 B 型设备中抽取 8 台,再从这 8 台设备中随机抽取 3 台,其中 A 型设备为 X 台,求 X 的分布列和数学期望;

(3)已知用频率估计概率,现有一项工作需要 10 台同型号设备同时工作 2500 小时才能完成,工作期间设备损坏立即更换同型号设备(更换设备时间忽略不计),A 型和 B 型设备每台的价格分别为 1 万元和 0.8 万元,A 型和 B 型设备每台每小时耗电分别为 2 度和 6 度,电价为 0.75 元/度,只考虑设备的成本和电费,你认为应选择哪种型号的设备,请说明理由.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

参考数据:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$,过左顶点且斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$ 的直线和以椭圆的右顶点 A 为圆心,短半轴为半径的圆相切.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)若过点 A 作两条互相垂直的直线 AM 和 AN,分别交椭圆 C 于 M, N 两点,问 x 轴上是否存在一定点 Q,使得 $\angle MQA = \angle NQA$ 成立,若存在,则求出该定点 Q,若不存在,请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 + x) + 2$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)当 $a > 0$ 时,若 $f(x)$ 的极大值点为 x_1 ,求证: $f(x_1) < -2\ln 2 + \frac{1}{2}$.



关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜

自主选拔在线

