

2021年7月测试

理科数学 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	A	C	C	D	B	D	A	A	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $\frac{\pi}{2}$  (或  $90^\circ$ )

14. 1

15. 10.5

16. 0

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

解析：

(1) 在  $\triangle ABC$  中， $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$ ，

$5 = 1 + BC^2 + \sqrt{2}BC \Rightarrow BC^2 + \sqrt{2}BC - 4 = 0$ ，

解得  $BC = \sqrt{2}$  .....4 分

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$  .....5 分

(2)  $\because \angle BAD = 90^\circ$ ， $\cos \angle CAD = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\therefore \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

$\therefore \sin \angle BCA = \sin \left( \frac{\pi}{4} - \angle BAC \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \angle BAC - \sin \angle BAC) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{\sqrt{10}}{10}$  .....6 分

在  $\triangle ABC$  中， $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$ ，

$\therefore AC = \frac{AB \cdot \sin \angle ABC}{\sin \angle BCA} = \sqrt{5}$ ，

$\therefore \triangle ACD$  中， $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos \angle CAD$ ， $13 = 5 + AD^2 - 2AD$ ，

$\therefore AD = 4$  .....10 分

18. (12 分)

解析：

(1) 男生人数为:  $120 \times \frac{11}{11+13} = 55$ , 所以女生人数为  $120 - 55 = 65$ ,

于是可完成  $2 \times 2$  列联表, 如下:

	了解	不了解	总计
男生	30	25	55
女生	40	25	65
合计	70	50	120

.....3 分

根据列联表中的数据, 得到  $k^2$  的观测值:

$$k^2 = \frac{120 \times (30 \times 25 - 25 \times 40)^2}{55 \times 65 \times 50 \times 70} = \frac{600}{1001} \approx 0.599 < 2.706,$$

所以没有 90% 的把握认为“精准脱贫政策了解与性别有关” .....6 分

(2) 根据分层抽样比例关系可知男生抽  $7 \times \frac{30}{70} = 3$  人, 女生抽 4 人.....7 分

依题可知  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2, 3, 并且  $\xi$  服从超几何分布,

$$P(\xi = k) = \frac{C_4^k C_3^{3-k}}{C_7^3} \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

$$\text{即 } P(\xi = 0) = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}, \quad P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}, \quad P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

可得分布列为

$\xi$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$\text{可得 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

解析:

$$(1) \because S_{n+1} = S_n + 2a_n + 1,$$

$$\therefore S_{n+1} - S_n = 2a_n + 1,$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 1,$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 2,$$

$$\text{又} \because a_1 = 1, \therefore a_1 + 1 = 2,$$

$\therefore \{a_n + 1\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列.....6 分

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1,$$

$$\therefore \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{2^n}{(2^n - 1) \cdot (2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1},$$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} < 1, \end{aligned}$$

$\therefore T_n < 1$  成立.....12 分

20. (12 分)

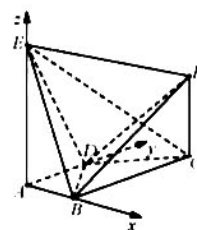
解析:

由题意, 可以建立以  $A$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AE}$  的方向为  $x$

轴,  $y$  轴,  $z$  轴正方向的空间直角坐标系 (如图),

可得  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C(1,2,0)$ ,  $D(0,1,0)$ ,  $E(0,0,2)$ ,

设  $CF = h (h > 0)$ ,



则  $F(1, 2, h)$ .....3 分

(1) 证明: 依题意,  $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$  是平面  $ADE$  的法向量,

又  $\overrightarrow{BF} = (0, 2, h)$ , 可得  $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ,

又因为直线  $BF \not\subset$  平面  $ADE$ ,  $\therefore BF \parallel$  平面  $ADE$ .....6 分

(2) 依题意,  $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{BF} = (0, 2, h)$ ,

设  $m = (x, y, z)$  为平面  $BDF$  的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + hz = 0 \end{cases}$$

不妨令  $y = 1$ , 可得  $m = \left(1, 1, -\frac{2}{h}\right)$ ,  $\overrightarrow{EB} = (1, 0, -2)$ ,  $\overrightarrow{ED} = (0, 1, -2)$

设  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  为平面  $EBD$  的法向量,

$$\text{则由} \begin{cases} \vec{EB} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{ED} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}, \text{得: } \begin{cases} x_1 - 2z_1 = 0 \\ y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{n}_1 = (2, 2, 1),$$

$$\text{由题意, 有 } \cos(\vec{m}, \vec{n}_1) = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{m}| |\vec{n}_1|} = \frac{|4 - 2h|}{3\sqrt{2 + 4h^2}} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } h = \frac{8}{7}$$

所以线段  $CF$  的长为  $\frac{8}{7}$  .....10 分

$$\therefore V_{C-BDE} = V_{E-BDC} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDC} \cdot CF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{8}{7} = \frac{8}{21} \text{ .....12 分}$$

21. (12 分)

解析:

(1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = e^{x-1} - \ln x$ , 定义域为  $\{x|x>0\}$ ,

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \text{ .....2 分}$$

$$\text{令 } h(x) = f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x},$$

$$\therefore h'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0,$$

$\therefore h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{又 } h(1) = e^0 - 1 = 0 \text{ .....4 分}$$

$\therefore x \in (0, 1)$ ,  $h(x) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  为减函数,

$x \in (1, +\infty)$ ,  $h(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  为增函数,

$\therefore f(x)$  增区间为  $(1, +\infty)$ , 减区间为  $(0, 1)$ .

$$(2) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = e^{x-1} - \frac{a}{x} = \frac{xe^{x-1} - a}{x},$$

$$\text{令 } g(x) = xe^{x-1}, \text{ 则 } g'(x) = (x+1)e^{x-1} > 0,$$

$\therefore g(x) = xe^{x-1}$  在  $(0, +\infty)$  单增, 且  $g(x) \in (0, +\infty)$ .

因此, 存在唯一的  $x_0 > 0$  满足  $x_0 e^{x_0-1} = a$ ,

且当  $0 < x < x_0$  时,  $xe^{x-1} - a < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ ,

当  $x > x_0$  时,  $xe^{x-1} - a > 0$ , 即  $f'(x) > 0$ .

因此  $f(x_0)$  为  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的极小值, 也是最小值.....9 分

下证:  $f(x_0) \geq a$ , 即证  $e^{x_0-1} - a \ln x_0 \geq a - a \ln a$ ,

$$\because x_0 e^{x_0-1} = a, \therefore e^{x_0-1} = \frac{a}{x_0}, \quad x_0 - 1 = \ln a - \ln x_0,$$

$$\text{于是 } e^{x_0-1} - a \ln x_0 = \frac{a}{x_0} - a(\ln a - x_0 + 1) = \frac{a}{x_0} + ax_0 - a - a \ln a$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{x_0} \cdot ax_0} - a - a \ln a = a - a \ln a, \text{ 不等式 } f(x) \geq a \text{ 得证.....12 分}$$

22. (12 分)

解析:

(1) 根据椭圆对称性, 必过点  $A, B$ ,

又  $C$  纵坐标为 1, 椭圆必不过  $C$ , 所以过  $A, B, D$  三点

$$\text{将 } D(0, \sqrt{3}), A(2, 1) \text{ 代入椭圆方程得 } \begin{cases} \frac{3}{b^2} = 1, \\ \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \end{cases}$$

解得:  $a^2 = 6, b^2 = 3$ .....3 分

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ .....4 分

(2) 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

若直线  $MN$  与  $x$  轴不垂直, 设直线  $MN$  的方程为  $y = kx + m$ ,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 得 } (1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta > 0 \text{ 得 } 6k^2 - m^2 + 3 > 0$$

$$\text{于是 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 6}{1+2k^2} \text{ ①.....8 分}$$

$$\text{由 } AM \perp AN \text{ 知 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0, \text{ 故 } (x_1 - 2)(x_2 - 2) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0,$$

$$\text{可得 } (1+k^2)x_1 x_2 + (km - k - 2)(x_1 + x_2) + (m-1)^2 + 4 = 0,$$

$$\text{将 ① 代入上式可得: } (1+k^2) \frac{2m^2 - 6}{1+2k^2} - (km - k - 2) \frac{4km}{1+2k^2} + (m-1)^2 + 4 = 0,$$

$$\text{整理得 } (2k + 3m + 1)(2k + m - 1) = 0,$$

若  $2k+m-1=0$  则  $MN$  的方程为  $y=kx+1-2k$ ，此时直线过点  $(2,1)$  与点  $A$  重合，舍去

$\therefore 2k+m-1 \neq 0$ ，故  $2k+3m+1=0$ ，此时  $\Delta > 0$ ，

于是  $MN$  的方程为  $y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}$ ，

所以直线  $MN$  过点  $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ .....11 分

若直线  $MN$  与  $x$  轴垂直，可得  $N(x_1, -y_1)$ ，

由  $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = 0$  得  $(x_1-2)(x_1-2) - (y_1-1)(y_1+1) = 0$ ，

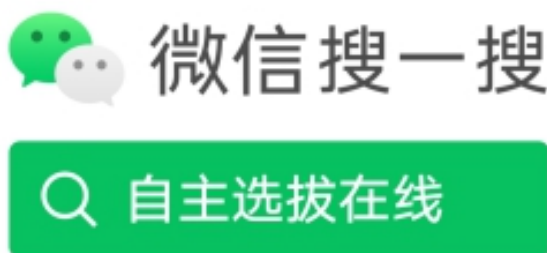
又  $\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ ，可得  $3x_1^2 - 8x_1 + 4 = 0$ ，

解得  $x_1 = 2$  (舍去)， $x_1 = \frac{2}{3}$ ，此时直线  $MN$  过点  $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ .....12 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》