机密★启用前

华中师范大学第一附属中学 2018 届高三 5 月押题考试

文科数学

命题单位：华中师范大学第一附属中学高三年级组
命题人：李继林　田　甜　王雪冰
审题人：王雪冰
审订单位：华中师范大学考试研究院

本试题卷共 4 页，23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将答题卡上交。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 设 i 是虚数单位，则复数 $z=\frac{2i}{1-i}$ 的虚部等于

A. $-i$　　B. i　　C. -1　　D. 1

2. 设集合 $M=\{x|x^2+y^2=2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{(-1,1),(1,1)\}$　　B. $[0,\sqrt{2}]$　　C. $[0,2]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

3. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\cos2\alpha=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{2}{5}$

4. “$k=0$”是“直线 $x-ky-1=0$ 与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 相切”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

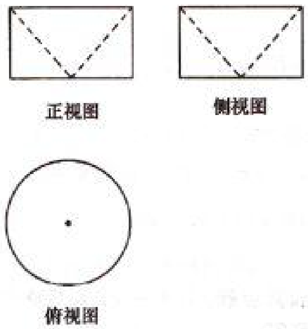
5. 已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant0,\\x\leqslant2,\\x+y-2\geqslant0,\end{cases}$ 则 $\frac{y+1}{x+2}$ 的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{4},1\right]$　　B. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]$
C. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]\cup[1,+\infty)$　　D. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

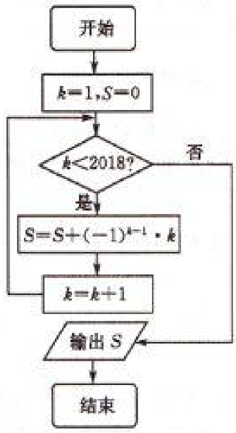
6. 已知一个几何体的三视图如图所示，图中长方形的长为 $2r$，宽为 r，圆的半径为 r，则该几何体的体积和表面积分别为

A. $\frac{4}{3}\pi r^3,(3+\sqrt{2})\pi r^2$　　B. $\frac{2}{3}\pi r^3,(3+\sqrt{2})\pi r^2$

C. $\frac{4}{3}\pi r^3,(4+\sqrt{2})\pi r^2$　　D. $\frac{2}{3}\pi r^3,(4+\sqrt{2})\pi r^2$



第 6 题图



第 7 题图

7. 运行如图所示的程序框图，则输出的结果 S 为

A. 1009　　B. -1009　　C. -1008　　D. 1008

8. 将函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 平移后所得的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称，则 ω 的值可能为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9. 关于 x 的方程 $kx=\sin x(k\in(0,1))$ 在 $(-3\pi,3\pi)$ 内有且仅有 5 个根，设最大的根是 α，则 α 与 $\tan\alpha$ 的大小关系是

A. $\alpha>\tan\alpha$　　B. $\alpha<\tan\alpha$　　C. $\alpha=\tan\alpha$　　D. 以上都不对

10. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=135^\circ$，$AB=\sqrt{2}$，$AC=1$，D 是 BC 边上的一点（包括端点），则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是

A. $[-3,0]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},2\right]$　　C. $[0,2]$　　D. $[-3,2]$

11. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，过点 F 作与 x 轴垂直的直线 l 交椭圆于 P,B 两点（点 P 在第一象限），过椭圆的左顶点和上顶点的直线 l_1 与直线 l 交于 A 点，且满足 $|\overrightarrow{AP}|<|\overrightarrow{BP}|$，设 O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，$\lambda\mu=\frac{2}{9}$，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{12}{13}$　　C. $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{12}{13}$　　D. $\frac{4}{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$（其中无理数 $e=2.718\cdots$），关于 x 的方程 $\sqrt{f(x)}+\frac{1}{\sqrt{f(x)}}=\lambda$ 有四个不等的实根，则实数 λ 的取值范围是

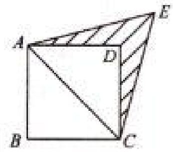
A. $\left(0,\frac{e}{2}\right)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $\left(\frac{e}{2}+\frac{2}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{e^2}{4}+\frac{4}{e^2},+\infty\right)$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题～23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分

13. 如图所示，已知正方形 $ABCD$，以对角线 AC 为一边作正$\triangle ACE$. 现向四边形区域 $ABCE$ 内投一点 Q，则点 Q 落在阴影部分的概率为________.



第 13 题图

14. 已知双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，且其焦点 $F(3,0)$到渐近线的距离等于$\sqrt{5}$，则双曲线的标准方程为________________.

15. 在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c 且 $2c\cos B=2a+b$，若$\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{3}c$，则 ab 的最小值为________.

16. 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$，若存在距离为 d 的两条直线 $y=kx+b_1$ 和 $y=kx+b_2$，使得对任意的 $x\in D$ 都有 $kx+b_1\leqslant f(x)\leqslant kx+b_2$，则称函数 $f(x)(x\in D)$有一个宽度为 d 的通道. 给出下列函数：①$f(x)=\frac{1}{x}$；②$f(x)=\sqrt{x^2-1}$；③$f(x)=\frac{\ln x}{x}$；④$f(x)=x+\sin x$.

其中在区间$[1,+\infty)$上通道宽度为 1 的函数有________(写出所有正确的序号).

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.（本小题满分 12 分）

已知正项等比数列$\{a_n\}$满足：$a_4=a_2a_3$，前三项和 $S_3=13$.

（Ⅰ）求 a_n；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足：$b_n=\log_3 a_n+n$，$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

某贫困地区共有 1500 户居民，其中平原地区 1050 户，山区 450 户. 为调查该地区 2017 年家庭收入情况，从而更好地实施“精准扶贫”，采用分层抽样的方法，收集了 150 户家庭 2017 年年收入的样本数据(单位：万元).

（Ⅰ）应收集多少户山区家庭的样本数据？

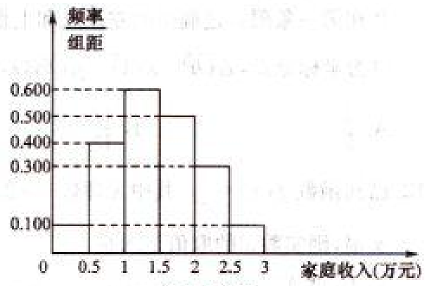
（Ⅱ）根据这 150 个样本数据，得到 2017 年家庭收入的频率分布直方图(如图所示)，其中样本数据分组区间为$(0,0.5]$，$(0.5,1]$，$(1,1.5]$，$(1.5,2]$，$(2,2.5]$，$(2.5,3]$. 如果将频率视为概率，估计该地区 2017 年家庭收入超过 1.5 万元的概率；

（Ⅲ）样本数据中，有 5 户山区家庭的年收入超过 2 万元，请完成 2017 年家庭收入与地区的列联表，并判断是否有 90%的把握认为“该地区 2017 年家庭年收入与地区有关”？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

	超过 2 万元	不超过 2 万元	总计
平原地区			
山区	5		
总计			



第 18 题图

19.(本小题满分 12 分)

如图 1,在 Rt△ABC 中,$\angle ABC=90^\circ$,D,E 分别为线段 AB,AC 的中点,$AB=4$,$BC=2\sqrt{2}$.以 DE 为折痕,将△ADE 折起到图 2 中△$A'DE$ 的位置,使平面 $A'DE\perp$平面 $DBCE$,连接 $A'C$,$A'B$.

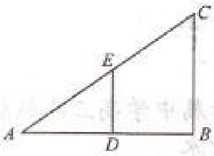


图1

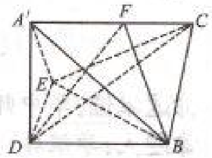


图2

第 19 题图

(Ⅰ)证明:$BE\perp$平面 $A'DC$;

(Ⅱ)设 F 是线段 $A'C$ 上的动点,$\overrightarrow{A'F}=\lambda\overrightarrow{A'C}$,若 $V_{A'-BDF}=\sqrt{2}$,求 λ 的值.

20.(本小题满分 12 分)

已知曲线 C:$x^2=8y$,F 是焦点,点 P 为准线上一点.直线 PF 交曲线 C 于 D、E 两点.

(Ⅰ)若$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{FE}$,且 E 在第一象限,求直线 PF 的方程;

(Ⅱ)求$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{PE}$的最大值,并求出此时点 P 的坐标.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{e^x}-1(m\in\mathbf{R})$,其中无理数 $e=2.718\cdots$.

(Ⅰ)若函数 $f(x)$有两个极值点,求 m 的取值范围;

(Ⅱ)若函数 $g(x)=(x-2)e^x-\dfrac{1}{3}mx^3+\dfrac{1}{2}mx^2$ 的极值点有三个,最小的记为 x_1,最大的记为 x_2,若$\dfrac{x_1}{x_2}$的最大值为$\dfrac{1}{e}$,求 x_1+x_2 的最小值.

请考生在第 22、23 题中任选一题做答,如果多做,则按所做第一题评分.

22.(本小题满分 10 分)[选修 4-4:坐标系与参数方程]

以直角坐标系的原点 O 为极点,以 x 轴正半轴为极轴,且两个坐标系取相等的长度单位,已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$),曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$.

(Ⅰ)若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$,求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(Ⅱ)设直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,当 α 变化时,求$|AB|$的最小值.

23.(本小题满分 10 分)[选修 4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|2x-1|-a(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $f(x)$在$[-1,2]$上的最大值是最小值的 2 倍,解不等式 $f(x)\geqslant 5$;

(Ⅱ)若存在实数 x 使得 $f(x)<\dfrac{1}{2}f(x+1)$成立,求 a 的取值范围.

华中师范大学第一附属中学 2018 届高三 5 月押题考试

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

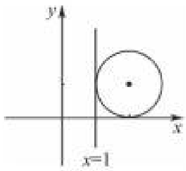
1. D 【解析】$z=\dfrac{2i(1+i)}{1+1}=-1+i$， ∴选 D.

2. B 【解析】M：$x^2\leqslant 2$ $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$， N：$y\geqslant 0$， ∴$M\cap N=[0,\sqrt{2}]$.

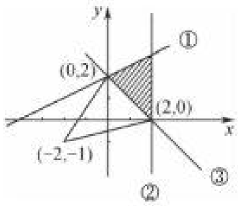
3. A 【解析】$\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}$.

4. C 【解析】如图，$k=0$ $x-1=0$，显然与$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 相切.

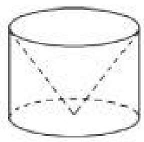
反之，$d=\dfrac{2-k-1}{\sqrt{1+k^2}}=1$ $k=0$， ∴选 C.



第 4 题图



第 5 题图


第 6 题图

5. B 【解析】如图，$k=\dfrac{y-(-1)}{x-(-2)}$，$\dfrac{0+1}{2+2}\leqslant k\leqslant\dfrac{2+1}{0+2}$ $\dfrac{1}{4}\leqslant k\leqslant\dfrac{3}{2}$， ∴选 B.

6. B 【解析】如图，$V=\pi r^2\cdot r-\dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot r=\dfrac{2}{3}\pi r^3$，

$S=2\pi r\cdot r+\pi r^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot\sqrt{2}r=(3+\sqrt{2})\pi r^2$.

7. A 【解析】$S=1$，$k=2$；

$S=1-2$，$k=3$；

$S=1-2+3$，$k=4$；

$S=1-2+3-4$，$k=5$；

…

$S=1-2+3-4+\cdots+2017$，$k=2018$；

∴输出 $S=\underbrace{-1-1\cdots-1}_{1008项}+2017=1009$.

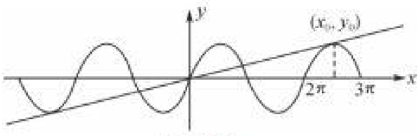
8. C 【解析】$y=\sin\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x-\dfrac{\omega\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

∴$\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\omega-\dfrac{\pi}{12}\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$， 代入检验知选 C.

9. C 【解析】如图，作 $y=kx$，$y=\sin x$，$x\in(-3\pi,3\pi)$的图象.

设切点为(x_0,y_0)，$x_0\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，则 $x_0=\alpha$.

$k=y'=\cos x_0$，



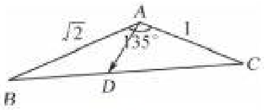
第 9 题图

即 $\frac{y_0}{x_0}=\cos x_0$， 即 $\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\cos\alpha$ $\tan\alpha=\alpha$.

10. D 【解析】如图，$AD=\lambda AB+(1-\lambda)AC$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

$BC=AC-AB$，

$$\begin{aligned}AD\cdot BC&=(AC-AB)[\lambda AB+(1-\lambda)AC]\\&=(1-\lambda)AC^2-\lambda AB^2+(2\lambda-1)AB\cdot AC\\&=1-\lambda-2\lambda+(2\lambda-1)\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ\\&=2-5\lambda\in[-3,2].\end{aligned}$$



第 10 题图

11. A 【解析】如图，∵A、P、B 共线，∴$\lambda+\mu=1$． 又 $\lambda\mu=\frac{2}{9}$，

∴$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3},\\ \mu=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3},\\ \mu=\frac{1}{3}.\end{cases}$ 又 $|AP|<|BP|$， ∴$\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3},\\ \mu=\frac{1}{3}.\end{cases}$

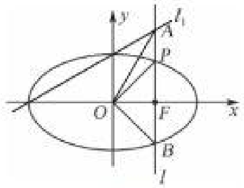
又 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，

$l_1:\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$， 令 $x=c$， ∴$A\left(c,\frac{(a+c)b}{a}\right)$.

$OP=\frac{2}{3}OA+\frac{1}{3}OB$， ∴$\frac{b^2}{a}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(a+c)b}{a}+\frac{1}{3}\left(-\frac{b^2}{a}\right)$ $2b=a+c$，

∴$4(a^2-c^2)=a^2+c^2+2ac$ $3a^2-5c^2-2ac=0$，

∴$5e^2+2e-3=0$， ∴$e=\frac{3}{5}$， ∴选 A.



第 11 题图

12. C 【解析】$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-2xe^x}{x^4}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}=0$ $x=2$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+
$f(x)$	↗	↘		↗

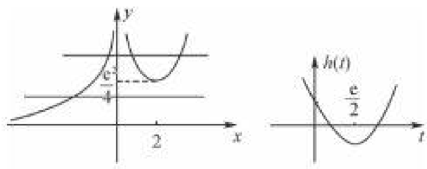


图 1 图 2
第 12 题图

而 $f(2)=\frac{e^2}{4}$，∴$f(x)$的图象如图 1 所示，

令 $g(x)=\sqrt{f(x)}$，则 $t=g(x)$的增减性与 $f(x)$相同，$g(2)=\frac{e}{2}$.

$g(x)+\frac{1}{g(x)}=\lambda$ $t^2-\lambda t+1=0$ 在$\left(0,\frac{e}{2}\right)$和$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$上分别有根.

令 $h(t)=t^2-\lambda t+1$，则 $h(t)$的图象如图 2 所示，又 $h(0)>0$，∴$h\left(\frac{e}{2}\right)<0$ 即可.

即$\frac{e^2}{4}-\lambda\cdot\frac{e}{2}+1<0$ $\lambda>\frac{e}{2}+\frac{2}{e}$.

二、填空题

13. $2-\sqrt{3}$． 【解析】设正方形的边长为 2，则 $AC=2\sqrt{2}$.

$$P=\frac{\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\times 2\times 2}{\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\sin 60^\circ}=2-\sqrt{3}.$$

14. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 【解析】渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$， $bx\pm ay=0$，

$d=\frac{3b}{\sqrt{b^2+a^2}}=\sqrt{5}$. 又 $c=3$， $\therefore\frac{3b}{c}=\sqrt{5}$， $\therefore b=\sqrt{5}$.

$\therefore a^2=9-5=4$.

15. 48. 【解析】$2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B$，

$2\sin C\cos B=2\sin(B+C)+\sin B=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin B$，

$2\sin B\cos C+\sin B=0$， 而 $\sin B\neq0$，$\therefore\cos C=-\frac{1}{2}$ $C=\frac{2\pi}{3}$.

$S=\frac{1}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}c$， $\therefore ab=4c$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}$，

$\frac{1}{16}a^2b^2=a^2+b^2+ab\geqslant2ab+ab$， 当且仅当 $a=b$ 时取"=" $ab\geqslant48$.

16. ①②③.

【解析】①如图1，$y=\frac{1}{x}$，$x\geqslant1$. $l_1:y=1$；$l_2:y=0$.

②如图2，$y=\sqrt{x^2-1}$ $x^2-y^2=1$. $l_1:y=x$；$l_2:y=x-\sqrt{2}$.

③如图3，$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，$x=e$. $f(e)=\frac{1}{e}<1$. $l_1:y=1$；$l_2:y=0$.

④$x-1\leqslant x+\sin x\leqslant x+1$，

$y=x+1$ 与 $y=x-1$ 之间的距离为$\sqrt{2}>1$，

又 $y'=1+\cos x\geqslant0$，$\therefore f(x)$为增函数，

设 $y=f(x)$的切点为(x_0,y_0)， $k=1+\cos x_0=1$ $\cos x_0=0$， $x_0=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

与 $y=x+1$ 平行的切线：$y-x_0-\sin x_0=x-x_0$ $y=x+\sin x_0$ $y=x\pm1$，

$y=x\pm1$ 恰好与 $y=x+\sin x$ 相切. $\therefore$不存在 l_1,l_2.

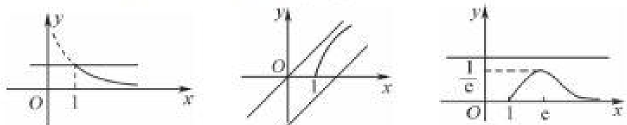


图1 图2 图3

第16题图

三. 解答题

17. (Ⅰ)$\because a_4=a_2a_3$，$\therefore a_4=a_1a_4$，$\because a_4\neq0$，$\therefore a_1=1$. ………………………… (2分)

$\because S_3=a_1+a_2+a_3=1+q+q^2=13$ 且 $q>0$，$\therefore q=3$. ………………………… (4分)

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$. ………………………… (6分)

(Ⅱ)$\because b_n=\log_3 3^{n-1}+n=2n-1$. ………………………… (8分)

$\therefore\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. ………………………… (10分)

$\therefore T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$. ………………………… (12分)

18. (Ⅰ)由已知可得每户居民被抽取的概率为0.1，故应收集$450\times0.1=45$户山区家庭的样本数据.
………………………… (3分)

(Ⅱ)由直方图可知该地区2017年家庭年收入超过1.5万元的概率约为$(0.500+0.300+0.100)\times0.5=0.45$. ………………………………………………………… (6分)

(Ⅲ)样本数据中,年收入超过2万元的户数为$(0.300+0.100)\times0.5\times150=30$户,

而样本数据中,有5户山区家庭的年收入超过2万元,故列联表如下:

	超过2万元	不超过2万元	总计
平原地区	25	80	105
山区	5	40	45
总计	30	120	150

所以 $K^2=\dfrac{150\ (25\times40-5\times80)^2}{30\times120\times105\times45}=\dfrac{200}{63}\ \ 3.175>2.706$.

∴有90%的把握认为"该地区2017年家庭年收入与地区有关". ………………………… (12分)

19. (Ⅰ)∵平面$A'DE\perp$平面$DBCE$,$A'D\perp DE$,DE=面$A'DE\cap$面$DBCE$,

∴$A'D\perp$平面$DBCE$. ∵$BE\subset$面$DBCE$,∴$A'D\perp BE$. ………………………………………… (2分)

∵D,E分别为线段AB,AC的中点,∴$DE/\!/BC$,$DE=\sqrt2$,$BD=2$.

设BE与CD交于点O,∴$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac12=\dfrac{DO}{CO}=\dfrac{EO}{BO}$.

∴$DO=\dfrac13DC=\dfrac{2\sqrt3}{3}$,$BO=\dfrac23BE=\dfrac{2\sqrt6}{3}$. ∵$BD=2$,∴$DO^2+BO^2=BD^2$.

∴$BE\perp DC$.

∵$A'D\cap DC=D$,∴$BE\perp$平面$A'DC$. ……………………………………………………… (6分)

(Ⅱ)∵$A'F=\lambda A'C$,∴$V_{A'-BDF}=V_{F-A'BD}=\lambda V_{C-A'BD}=\lambda V_{A'-BCD}$.

由(Ⅰ)知,$A'D\perp$面$DBCE$,∴$V_{A'-BCD}=\dfrac13A'D\cdot S_{\triangle BCD}$.

∴$\lambda\cdot\dfrac13\cdot2\cdot\dfrac12\cdot2\cdot2\sqrt2=\sqrt2$,∴$\lambda=\dfrac34$. ………………………………………………… (12分)

20. 由题意$F(0,2)$,设$P(x_0,-2)$,$D(x_1,y_1)$,$E(x_2,y_2)$.

(Ⅰ)∵$PF=FE$, ∴F为PE的中点.

∴$y_2-2=2\times2$, $y_2=6$,

∴$E(4\sqrt3,6)$. ………………………………………………………………………… (3分)

∴$k_{EF}=\dfrac{6-2}{4\sqrt3}=\dfrac{1}{\sqrt3}$.

∴直线PF的方程为$y=\dfrac{1}{\sqrt3}x+2$,即$x-\sqrt3y+2\sqrt3=0$. ……………………………… (5分)

(Ⅱ)方法一:设直线PF:$y=kx+2(k\neq0)$,其中$k=-\dfrac{4}{x_0}$.

$DP\cdot PE=(x_0-x_1,-2-y_1)\cdot(x_2-x_0,y_2+2)=x_0(x_1+x_2)-x_1x_2-x_0^2-(kx_1+4)(kx_2+4)$

$=(x_0-4k)(x_1+x_2)-(1+k^2)x_1x_2-x_0^2-16$.

由$\begin{cases}y=kx+2,\\x^2=8y\end{cases}$得$x^2-8kx-16=0$. 则有$x_1+x_2=8k$,$x_1x_2=-16$. ………………… (8分)

∴$DP\cdot PE=(x_0-4k)8k+16(1+k^2)-16-x_0^2=8k\left(\dfrac{-4}{k}-4k\right)+16k^2-\dfrac{16}{k^2}$

$=-32-16\left(k^2+\dfrac{1}{k^2}\right)\leqslant-64$,当且仅当$k=\pm1$时取"=".

$\therefore$当 $k=\pm1$ 时，$DP\cdot PE$有最大值-64，此时点 P 的坐标为$(\pm4,-2)$. …………………… (12分)

方法二：设 PF 的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数)，其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，将参数方程代入抛物线方程得 $\cos^2\alpha\cdot t^2+(2\cos\alpha\cdot x_0-8\sin\alpha)t+x_0^2+16=0$.

$\therefore DP\cdot PE=-t_1t_2=-\dfrac{x_0^2+16}{\cos^2\alpha}$. …………………………………………………………………… (8分)

$\because\tan\alpha=-\dfrac{4}{x_0}$，$\therefore\cos^2\alpha=\dfrac{x_0^2}{16+x_0^2}$，$DP\cdot PE=-\dfrac{(16+x_0^2)^2}{x_0^2}$.

令 $x_0^2=\lambda(\lambda>0)$，

$DP\cdot PE=-\dfrac{(16+\lambda)^2}{\lambda}=-\left(\dfrac{256}{\lambda}+\lambda+32\right)\leqslant-64$，当且仅当 $\lambda=16$ 时取"="，…………… (10分)

$\therefore DP\cdot PE$的最大值为-64，此时点 P 的坐标为$(\pm4,-2)$. …………………………………… (12分)

21. (Ⅰ) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{e^x}=\dfrac{e^x-mx}{xe^x}$，

令 $\varphi(x)=e^x-mx$，$x>0$.

$\because f(x)$有两个极值点，$\therefore\varphi(x)=0$ 有两个不等的正实根.

$\varphi'(x)=e^x-m$.

当 $m\leqslant1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不符合题意. ………………………… (2分)

当 $m>1$ 时，当 $x\in(0,\ln m)$时，$\varphi'(x)<0$，当 $x\in(\ln m,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore\varphi(x)$在$(0,\ln m)$上单调递减，在$(\ln m,+\infty)$上单调递增.

又 $\varphi(0)=1$，当 $x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to+\infty$.

$\therefore\varphi(\ln m)=m-m\ln m<0$，$\therefore m>e$.

综上，m 的取值范围是$(e,+\infty)$. ……………………………………………………………………… (5分)

(Ⅱ) $g'(x)=e^x(x-1)-mx^2+mx=(x-1)(e^x-mx)=(x-1)\varphi(x)$.

$\because g(x)$有三个极值点，$\therefore g'(x)$有三个零点，1 为一个零点，其他两个则为 $\varphi(x)$的零点.

由(Ⅰ)知 $m>e$，$\because\varphi(1)=e-m<0$，

$\therefore\varphi(x)$的两个零点即为 $g(x)$的最小和最大极值点 x_1，x_2，

即$\begin{cases}e^{x_1}=mx_1,\\ e^{x_2}=mx_2,\end{cases}$ ………………………………………………………………………………… (7分)

$\therefore\dfrac{x_1}{x_2}=e^{x_1-x_2}$，令$\dfrac{x_1}{x_2}=t$，由题知 $0<t\leqslant\dfrac{1}{e}$.

$\therefore t=e^{tx_2-x_2}=e^{(t-1)x_2}$，$x_2=\dfrac{\ln t}{t-1}$，$x_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}$. $\therefore x_1+x_2=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$. ……………………… (9分)

令 $h(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，$0<t\leqslant\dfrac{1}{e}$.

则 $h'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$.

令 $m(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，

则 $m'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2>0$.

$\therefore m(t)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$上单调递增，$\therefore m(t)\leqslant m\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-e+2<0$.

$\therefore h(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ 上单调递减，$\therefore h(t)\geqslant h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{-\left(\dfrac{1}{e}+1\right)}{\dfrac{1}{e}-1}=\dfrac{e+1}{e-1}$.

故 x_1+x_2 的最小值为 $\dfrac{e+1}{e-1}$. ……………………………………………………………………………（12 分）

22.（Ⅰ）当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时，由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha,\end{cases}$ 消去 t 得 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$，

即直线 l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$.

由 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$，得 $(\rho\cos\theta)^2=4\rho\sin\theta$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=4y$. ……………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）将直线 l 的参数方程代入 $x^2=4y$，得 $t^2\cos^2\alpha-4t\sin\alpha-8=0$，

由题意知 $\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=\dfrac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，$t_1t_2=-\dfrac{8}{\cos^2\alpha}$，

$\therefore |AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\dfrac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2+\dfrac{32}{\cos^2\alpha}}$

$=4\sqrt{\dfrac{1}{\cos^4\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=4\sqrt{(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}}$.

$\because \alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\cos^2\alpha\in(0,1]$，$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\geqslant 1$，

$\therefore$ 当 $\cos^2\alpha=1$，即 $\alpha=0$ 时，$|AB|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$. ……………………………………………（10 分）

23.（Ⅰ）因为 $x\in[-1,2]$，所以 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{2})=-a$，$f(x)_{\max}=f(-1)=f(2)=3-a$，

所以 $3-a=-2a$，解得 $a=-3$.

不等式 $f(x)\geqslant 5$ 即为 $|2x-1|\geqslant 2$，解得 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$ 或 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$，

故不等式 $f(x)\geqslant 5$ 的解集为 $\{x|x\geqslant\dfrac{3}{2}$ 或 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}\}$. ……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由 $f(x)<\dfrac{1}{2}f(x+1)$，得 $a>|4x-2|-|2x+1|$，

令 $g(x)=|4x-2|-|2x+1|$，问题转化为 $a>g(x)_{\min}$.

又 $g(x)=\begin{cases}-2x+3,x\leqslant-\dfrac{1}{2},\\ -6x+1,-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2},\\ 2x-3,x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 故 $g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{2})=-2$，

则 $a>-2$. 所以实数 a 的取值范围为 $(-2,+\infty)$. ………………………………………………（10 分）

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注