郑州市2021年高中毕业年级第三次质量预测
理科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题，共60分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x|3^x<1\}$，则 $A\cap \complement_R B=$

A. $\{x|x<0\}$　　B. $\{x|x\geqslant -2\}$　　C. $\{x|-2\leqslant x<0\}$　　D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

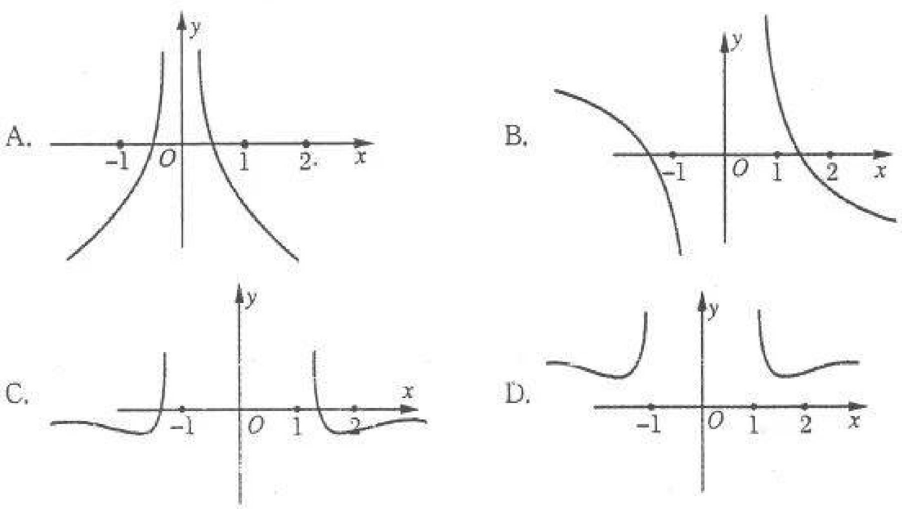
2. 1748年，瑞士著名数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写出以下公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，这个公式在复变论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”. 根据此公式可知，设复数 $z=e^{\frac{\pi}{4}i}$，根据欧拉公式可知，$\frac{z}{1-i}$ 表示的复数的虚部为

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}i$

3. 若直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是函数 $f(x)$ 图像的一条切线，则函数 $f(x)$ 不可能是

A. $f(x)=e^x$　　B. $f(x)=x^4$　　C. $f(x)=\sin x$　　D. $f(x)=\frac{1}{x}$

4. 函数 $f(x)=\ln|x|+\frac{1}{x^2}$ 的图像大致为



5. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，且$a_3^2=a_1a_7$，S_n为其前n项和，则$\frac{S_n}{a_1}=$

A. $\frac{n(n+3)}{4}$　　B. $\frac{n(n-3)}{4}$　　C. $\frac{n(n-1)}{2}$　　D. $n(n-1)$

6. 已知函数$f(x)=e^x-e^{-x}$，$a=f(3^{0.2})$，$b=f(0.3^{0.2})$，$c=f(\log_{0.2}3)$，则a,b,c的大小关系为

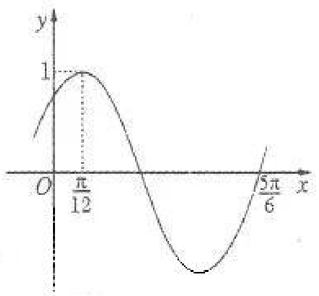
A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

7. 若x,y满足条件$\begin{cases}3x-5y+15\geqslant 0,\\ y\leqslant -x+11,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$当且仅当$x=5$，$y=6$时，$z=ax-y$取最小值，则实数$a$的取值范围是

A. $(-1,\frac{5}{3})$　　B. $(-\frac{3}{5},1)$

C. $(-1,\frac{3}{5})$　　D. $(-\infty,-1)\cup(\frac{3}{5},+\infty)$

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=f\left(\frac{n\pi}{6}\right)$，其中$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图像如图所示，$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则$S_{2021}$的值为



A. -1　　B. 0

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 已知等腰直角$\triangle ABC$的斜边$BC=4$，沿斜边的高线AD将$\triangle ABC$折起，使二面角$B-AD-C$为$\frac{\pi}{3}$，则四面体$ABCD$的外接球的体积为

A. $\frac{\sqrt{21}}{3}\pi$　　B. $\frac{28\sqrt{21}}{27}\pi$　　C. $\frac{28}{3}\pi$　　D. $\frac{28}{9}\pi$

10. 已知A,B是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$长轴的两个端点，$P$、$Q$是椭圆上关于$x$轴对称的两点，直线$AP,BQ$的斜率分别为$k_1,k_2(k_1k_2\neq 0)$. 若椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$|k_1|+|k_2|$的最小值为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

11. 在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$E\in$平面AA_1B_1B，点F是线段AA_1的中点，若$D_1E\perp CF$，则$\triangle EBC$面积的最小值为

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. 1　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 2

12. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(3x)$，当 $x\in[\frac{1}{3},1)$时，$f(x)=\ln 3x$，若在区间$[\frac{1}{3},9)$内，函数 $g(x)=f(x)-ax$ 有四个不同零点，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{\ln 3}{3},\frac{1}{e}\right)$　　B. $\left(\frac{\ln 3}{9},\frac{1}{3e}\right)$　　C. $\left(\frac{\ln 3}{9},\frac{1}{2e}\right)$　　D. $\left(\frac{\ln 3}{9},\frac{\ln 3}{4}\right)$

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 在矩形 $ABCD$ 中，其中 $AB=3$，$AD=1$，AB 上的点 E 满足$\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}=\mathbf{0}$，$F$ 为 AD 上任意一点，则$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BF}=$________.

14. $(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{7}{6}}b^{\frac{2}{3}})^9$ 展开式中的 a 与 b 指数相同的项的表达式为 ________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点、右焦点为 A、F，过点 A 的直线 l 与 C 的一条渐近线交于点 Q，直线 QF 与 C 的一个交点为 B，$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{FB}$，且$\overrightarrow{BQ}=4\overrightarrow{FQ}$，则双曲线离心率 e 为 ________.

16. 1967 年，法国数学家蒙德尔布罗的文章《英国的海岸线有多长?》标志着几何概念从整数维到分数维的飞跃. 1977 年他正式将具有分数维的图形成为“分形”，并建立了以这类图形为对象的数学分支——分形几何. 分形几何不只是扮演着计算机艺术家的角色，事实表明它们是描述和探索自然界大量存在的不规则现象的工具.

下面我们用分形的方法来得到一系列图形，如图 1，线段 AB 的长度为 a，在线段 AB 上取两个点 C，D，使得 $AC=DB=\frac{1}{3}AB$，以 CD 为一边在线段 AB 的上方做一个正三角形，然后去掉线段 CD，得到图 2 中的图形；对图 2 中的线段 EC、ED 作相同的操作，得到图 3 中的图形；依此类推，我们就得到了以下一系列图形：

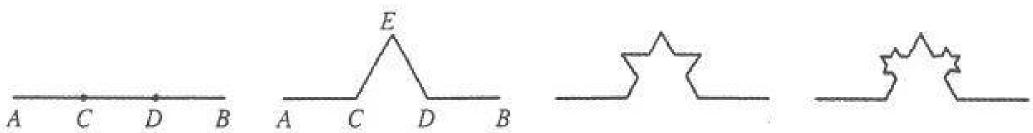


图1　图2　图3　图4

记第 n 个图形(图 1 为第 1 个图形)中的所有线段长的和为 S_n，若存在最大的正整数 a，使得对任意的正整数 n，都有 $S_n<2021$，则 $a=$________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

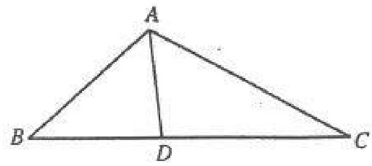
(一)必考题：共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

如图，在△ABC 中，$AB=9$，$\cos B=\frac{2}{3}$，点 D 在 BC 边上，$AD=7$，∠ADB 为锐角.

(Ⅰ)求 BD;

(Ⅱ)若 $\angle BAD=\angle DAC$,求 $\sin C$ 的值及 CD 的长.

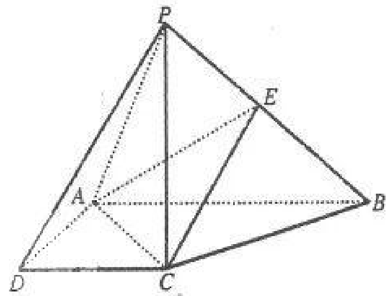


18.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PC\perp$底面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是直角梯形,$AB\perp AD$,$AB/\!/CD$,$AB=2$, $AD=CD=1$,E 是 PB 的中点.

(Ⅰ)求证:平面 $EAC\perp$平面 PBC;

(Ⅱ)若 $PC>1$,直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$,求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值.



19.(本小题满分 12 分)

手机芯片是一种硅板上集合多种电子元器件实现某种特定功能的电路模块,是电子设备中最重要的部分,承担着运输和存储的功能.某公司研发了一种新型手机芯片,该公司研究部门从流水线上随机抽取 100 件手机芯片,统计其性能指数并绘制频率分布直方图(如图 1):

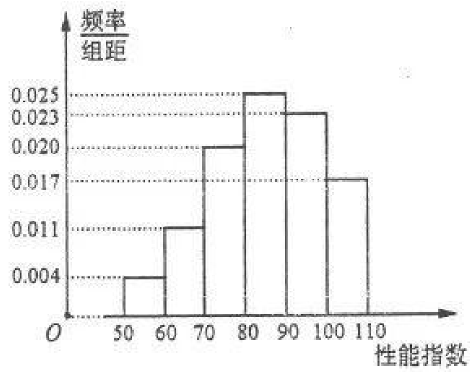


图 1

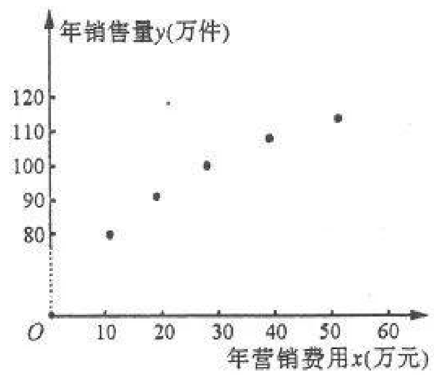


图 2

产品的性能指数在[50,70)的称为 A 类芯片，在[70,90)的称为 B 类芯片，在[90,110]的称为 C 类芯片，以这 100 件芯片的性能指数位于各区间的频率估计芯片的性能指数位于该区间的概率.

(Ⅰ)在该流水线上任意抽取 3 件手机芯片，求 C 类芯片不少于 2 件的概率；

(Ⅱ)该公司为了解年营销费用 x(单位:万元)对年销售量 y(单位:万件)的影响，对近 5 年的年营销费用 x_i 和年销售量 $y_i(i=1,2,3,4,5)$数据做了初步处理，得到的散点图如图 2 所示.

(ⅰ)利用散点图判断，$y=a+bx$ 和 $y=c\cdot x^d$(其中 c,d 为大于 0 的常数)哪一个更适合作为年营销费用和年销售量的回归方程类型(只要给出判断即可，不必说明理由)；

(ⅱ)对数据作出如下处理：令 $u_i=\ln x_i$，$v_i=\ln y_i$，得到相关统计量的值如下表：

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i$	$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i$	$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{5}u_i$	$\sum\limits_{i=1}^{5}v_i$	$\sum\limits_{i=1}^{5}u_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{5}u_iv_i$
150	725	5500	15750	16	25	56	82.4

根据(ⅰ)的判断结果及表中数据，求 y 关于 x 的回归方程；

(ⅲ)由所求的回归方程估计，当年营销费用为 100 万元时，年销量 y(万件)的预报值.(参考数据：$e^{3.4}=30$)

参考公式：对于一组数据$(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C:x^2=4y$ 和圆 $E:x^2+(y+1)^2=1$，过抛物线上一点 $P(x_0,y_0)$，作圆 E 的两条切线，分别与 x 轴交于 A、B 两点.

(Ⅰ)若切线 PB 与抛物线 C 也相切，求直线 PB 的斜率；

(Ⅱ)若 $y_0\geq 2$，求△PAB 面积的最小值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax+1$.

(Ⅰ)求 $f(x)$的最小值;

(Ⅱ)证明:对任意的 $x\in(0,+\infty)$,$e^x(\ln x+\frac{1}{x})-(e^x+x)+\frac{4e^{x-2}}{x}>0$ 恒成立.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题做答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.(本小题满分 10 分)[选修 4—4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中,以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=4$.

(Ⅰ)写出直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程;

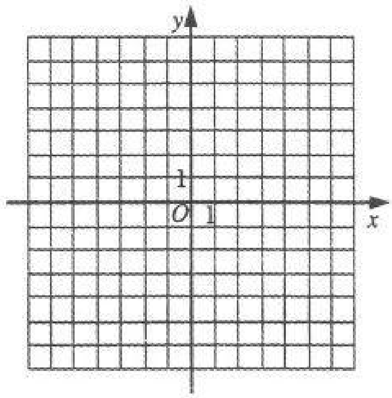
(Ⅱ)已知点 $A(1,0)$,若直线 l 与曲 C 线交于 P,Q 两点,PQ 中点为 M,求 $\frac{|AP|+|AQ|}{|AM|}$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)[选修 4—5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-4|$.

(Ⅰ)在平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$的图象;

(Ⅱ)若对 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)\leqslant t$ 恒成立,t 的最小值为 m,且正实数 a,b,c 满足 $a+2b+3c=m$,求 $\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}$ 的最小值.



2020-2021 高三三测理科数学评分参考

一、选择题

DCDDA　ACDBB　CB

二、填空题

12. -3;　14. $-84a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$;　15. $\dfrac{3+\sqrt{10}}{4}$;　16. 1010.

三、解答题

17.解：(1) 在 ΔABD 中，由余弦定理得 $AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=AD^2$，

整理得 $BD^2-12BD+32=0$，所以 $BD=8$ 或 $BD=4$.

当 $BD=4$ 时，$\cos\angle ADB=\dfrac{16+49-81}{2\times4\times7}=-\dfrac{2}{7}$，则 $\angle ADB>\dfrac{\pi}{2}$，不合题意，舍去；

当 $BD=8$ 时，$\cos\angle ADB=\dfrac{64+49-81}{2\times8\times7}=\dfrac{2}{7}$，则 $\angle ADB<\dfrac{\pi}{2}$，符合题意.

所以 $BD=8$．……………6 分

(2) 在 ΔABD 中，$\cos\angle BAD=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{11}{21}$，所以 $\sin\angle BAD=\dfrac{8\sqrt5}{21}$，

又 $\sin\angle ADB=\dfrac{3\sqrt5}{7}$，

所以 $\sin C=\sin(\angle ADB-\angle CAD)=\sin(\angle ADB-\angle BAD)=\dfrac{3\sqrt5}{7}\cdot\dfrac{11}{21}-\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{8\sqrt5}{21}=\dfrac{17\sqrt5}{147}$.

在 ΔACD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin C}$，所以 $CD=\dfrac{AD}{\sin C}\cdot\sin\angle CAD=\dfrac{7}{\frac{17\sqrt5}{147}}\cdot\dfrac{8\sqrt5}{21}=\dfrac{392}{17}$. 12 分

18 (1) 证明：$\because PC\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp PC$，……2 分

$AB=2$，$AD=CD=1$，$\therefore AC=BC=\sqrt2$

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore AC\perp BC$

又 $BC\cap PC=C$，$\therefore AC\perp$ 平面 PBC，

$\because AC\subset$ 平面 EAC，$\therefore$ 平面 $EAC\perp$ 平面 PBC.　……………5 分

(2) 以 C 为原点，建立空间直角坐标系如图所示，

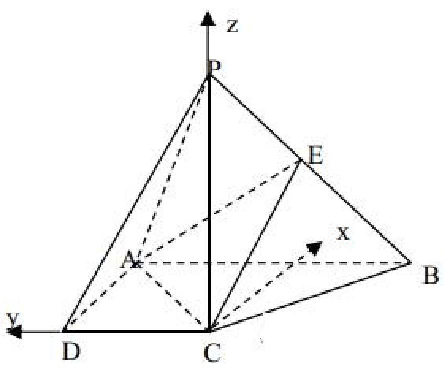
则 C (0，0，0)，A (1，1，0)，B (1，－1，0)，

设 P (0，0，a) (a>1)，则 E ($\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a}{2}$)，

$\overrightarrow{CA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{a}{2})$，$\overrightarrow{PA}=(1,1,-a)$，

设平面 EAC 的法向量 $\vec m$ = (x，y，z)，

则 $\begin{cases}x+y=0,\\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y+az=0,\end{cases}$ $\therefore \vec m=(1,-1,-\dfrac{2}{a})$，



设直线 PA 与平面 EAC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overline{PA},\overline{m}>|=\dfrac{1-1+2}{\sqrt{2+\dfrac{4}{a^2}}\cdot\sqrt{2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

解得 $a^4-5a^2+4=0, a=2$ 或 $a=1$（舍去）.

取 $\overline{CB}=(1,-1,0)$，则 $\overline{CB}\cdot\overline{CP}=\overline{CB}\cdot\overline{CA}=0$，$\therefore$ $\overline{CB}$ 为面 PAC 的法向量，$\overline{m}=(1,-1,-1)$，

$\cos<\overline{m},\overline{CB}>|=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………12 分

19.解：（1）由频率分布直方图，A、B、C 类芯片所占频率分别为 0.15，0.45，0.4，取出 C 类芯片的概率为 $\dfrac{2}{5}$，

设“抽出 C 类芯片不少于 2 件”为事件 A，$P(A)=(\dfrac{2}{5})^3+C_3^2(\dfrac{2}{5})^2\dfrac{3}{5}=\dfrac{44}{125}$. …………4 分

（2）（i）用 $y=c\cdot x^d$ 更适合； ……………6 分

（ii）$\ln y=\ln c+d\ln x$，令 $u=\ln x$，$\upsilon=\ln y$，则 $\upsilon=\ln c+du$，$\overline{u}=3.2,\overline{\upsilon}=5$，

由表中数据可得，$\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}u_i\upsilon_i-5\overline{u\upsilon}}{\sum\limits_{i=1}^{5}u_i^2-5\overline{u}^2}=\dfrac{82.4-5\times3.3\times5}{56-5\times3.2^2}=\dfrac{2.4}{4.8}=\dfrac{1}{2}$，

则 $\ln c=\overline{\upsilon}-\hat{b}\overline{u}=5-\dfrac{1}{2}\times3.2=3.4$，所以，$\hat{\upsilon}=3.4+0.5u$，

即 $\ln\hat{y}=3.4+0.5\ln x=\ln\left(e^{3.4}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)$，

因为 $e^{3.4}=30$，所以 $\hat{y}=30x^{\frac{1}{2}}$. ……………10 分

（iii）当 $x=100$，$\hat{y}=30\sqrt{100}$=300.所以年销售量的预报值为 300 万件. ………12 分

20.解：（1）设切线 PB 的方程为 $y=kx+m$，代入抛物线的方程得 $x^2-4kx-4m=0$，

由相切的条件可得 $\Delta=16k^2+16m=0$，即 $k^2+m=0$，

由直线与圆相切可得圆心到直线距离 $d=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $k^2=m^2+2m$，

所以 $m^2+3m=0$，$m=-3$ 或 $m=0$（舍去），$k^2=3,k=\pm3$. ……………6 分

（2）设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $kx-y+y_0-kx_0=0$，

圆心到直线距离 $d=\dfrac{|1+y_0-kx_0|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，整理得 $k^2(x_0{}^2-1)-(2x_0y_0+2x_0)k+y_0{}^2+2y_0=0$，

设 PA，PB 斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0+2x_0}{x_0{}^2-1},k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0{}^2+2y_0}{x_0{}^2-1}$，

令 y=0，得 $x_A=x_0-\frac{y_0}{k_1},x_B=x_0-\frac{y_0}{k_2}$，

$$|AB|=|(x_0-\frac{y_0}{k_1})-(x_0-\frac{y_0}{k_2})|=|\frac{y_0}{k_1}-\frac{y_0}{k_2}|=|\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}|\cdot y_0=\frac{\sqrt{4(y_0^{\ 2}+6y_0)}}{y_0^{\ 2}+2y_0}y_0=\frac{2\sqrt{y_0^{\ 2}+6y_0}}{y_0+2}$$

$$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot y_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{y_0^{\ 2}+6y_0}}{y_0+2}\cdot y_0=\sqrt{\frac{(y_0^{\ 2}+6y_0)y_0^{\ 2}}{(y_0+2)^2}},$$

令 $f(y)=\frac{(y^2+6y)y^2}{(y+2)^2},y\geq 2$，$f'(y)=\frac{2y^2(y^2+4y+18)}{(y+2)^3}>0$，

$f(y)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(y)_{\min}=f(2)=4$.

所以 $S_{\Delta PAB}$ 的最小值为 2.　　　　……………12 分

21.（1）解：由题意可得 f（x）的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\ln x-a$，

由 f'（x）<0，得 $0<x<e^{a-1}$；由 f'（x）>0，得 $x>e^{a-1}$.

则 f（x）在 $(0,e^{a-1})$ 上单调递减，在 $(e^{a-1},+\infty)$ 上单调递增.

故 $f'(x)_{\min}=f(e^{a-1})=1-e^{a-1}$.　　　　……………5 分

（2）要证 $e^x(\ln x+\frac{1}{x})-(e^x+x)+\frac{4e^{x-2}}{x}>0$ 成立，即证

$e^x(x\ln x+1)-x(e^x+x)+4e^{x-2}>0$，即证 $e^x(x\ln x-x+1)-x^2+4e^{x-2}>0$，

即证 $x\ln x-x+1>\frac{x^2}{e^x}-\frac{4}{e^2}$.

设 g（x）=$x\ln x-x+1$，由（1）可知 g（x）$_{min}$=g（1）=0.

设 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{4}{e^2}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}(x>0)$，

由 h'（x）>0，得 0<x<2；由 h'（x）<0，得 x>2，

则 h（x）在（0，2）上单调递增，在（2，+∞）上单调递减.

故 h（x）$_{max}$=h（2）=0，

因为 g（x）与 h（x）的最值不同时取得，所以 g（x）>h（x），即 $x\ln x-x+1=\frac{x^2}{e^x}-\frac{4}{e^2}$，

故当 x>0 时，不等式 e^x（$x\ln x+1$）－x（e^x+x）+$4e^{x-2}$>0 恒成立.　………12 分

22.解：（1）因为直线 $l:\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$，

即直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$................2 分

因为曲线 C：$\rho^2(1+4\sin^2\theta)=4$，则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+4y^2=4$，

即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$..........4 分

（2）设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

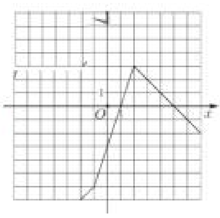
代入曲线 C 的直角坐标系方程得 $5t^2+2\sqrt{2}t-6=0$.

设 P，Q 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1t_2=-\frac{6}{5}$，$t_1+t_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$， ....6 分

所以 M 对应的参数 $t_0=\frac{t_1+t_2}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，

故 $\frac{|AP|+|AQ|}{|AM|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_0|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_0|}=\frac{\sqrt{(-\frac{2\sqrt{2}}{5})^2-4\cdot(-\frac{6}{5})}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=8$...............10 分

23.（1）$f(x)=\begin{cases}-x+5,x\geq 2\\ 3x-3,-1<x<2\\ x-5,x\leq -1\end{cases}$，图像如下所示...............5 分



（2）由（1）知，$f(x)_{\max}=3$，所以 $t\geq 3, m=3$，利用柯西不等式

$$\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{4}{2b+2c}\right)\left[(a+c)+(2b+2c)\right]$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{a+c}}\cdot\sqrt{a+c}+\sqrt{\frac{4}{2b+2c}}\cdot\sqrt{2b+2c}\right)^2=3$$

所以 $\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}$ 最小值为 3.当且仅当 $a+c=b+c=1$ 时等号成立...............10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。