

## 江西省五市九校协作体 2023 届第二次联考文科数学试卷

本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

主命题：九江三中 崔晋 副命题：九江三中 聂己未

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

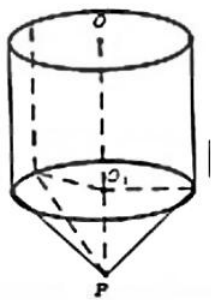
1. 已知集合  $A = \{1, a, b\}$ ,  $B = \{a^2, a, ab\}$ , 若  $A = B$ , 则  $a^{2023} + b^{2022} = ( )$

A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2

2. 已知  $i$  为虚数单位, 复数  $z$  满足  $|z - 2i| = 1$ , 则  $|z|$  的最大值为  $( )$

A. 1                      B.  $\sqrt{3}$                       C. 2                      D. 3

3. 陀螺是中国民间最早的娱乐工具之一, 它是一种绕一个支点高速转动的刚体, 种类很多, 其中有一种金属陀螺(如图), 它的形状可以认为是上半部分为圆柱, 下半部分为倒置的圆锥; 现知尖底长( $PO$ )为 3, 柱体与锥体部分高之比 2:1, 底周长为  $2\pi$ , 则陀螺的表面积为  $( )$



A.  $(4 + \frac{\sqrt{2}}{2})\pi$                       B.  $6\pi$                       C.  $(5 + \frac{\sqrt{2}}{2})\pi$                       D.  $(5 + \sqrt{2})\pi$

4. 袋中有大小相同的黄、红、白球各一个, 每次任取一个, 有放回地取 3 次, 则  $\frac{8}{9}$  是下列哪个事件的概率  $( )$

A. 颜色全同                      B. 颜色不全同                      C. 颜色全不同                      D. 无红球

5. 已知三个数  $a = 3^{0.5}$ ,  $b = \log_3 2$ ,  $c = \cos \frac{3}{2}$ , 则它们之间的大小关系是  $( )$

A.  $c < b < a$                       B.  $c < a < b$                       C.  $a < b < c$                       D.  $b < c < a$

6. 一条光线从点  $(1, -1)$  射出, 经  $y$  轴反射后与圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  相交, 则入射光线所在直线的斜率的取值范围为  $( )$

- A.  $[-\frac{3}{4}, 0]$       B.  $[0, \frac{3}{4}]$       C.  $(-\frac{3}{4}, 0)$       D.  $(0, \frac{3}{4})$

7. 已知 $\theta$ 是第三象限角, 且 $\sin^4\theta + \cos^4\theta = \frac{5}{9}$ , 那么 $\sin 2\theta =$ ( )

- A.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       B.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $-\frac{2}{3}$

8. 在某次独立性检验中, 得到如下列联表:

	A	$\bar{A}$	总计
B	200	800	1000
$\bar{B}$	180	a	180 + a
总计	380	800 + a	1180 + a

最后发现, 两个分类变量没有关联, 则a的值可能是( )

- A. 200      B. 720      C. 100      D. 180

9. 某大学开设选修课, 要求学生根据自己的专业方向以及自身兴趣从6个科目中选择3个科目进行研修, 已知某班级a名学生对科目的选择如下所示, 则a、b的一组值可以是( )

科目	国际金融	统计学	市场管理	二战历史	市场营销	会计学
人数	24	28	14	15	19	b

- A.  $a = 40, b = 10$       B.  $a = 40, b = 30$   
C.  $a = 37, b = 21$       D.  $a = 37, b = 11$
10. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 8, a_4 = -1$ . 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n = 1, 2, \dots)$ , 则数列 $\{T_n\}$ ( )

- A. 有最大项, 有最小项      B. 有最大项, 无最小项  
C. 无最大项, 有最小项      D. 无最大项, 无最小项

11. 已知 $F_1, F_2$ 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 双曲线上存在一点P

使得 $PF_1 \perp PF_2$ , 且 $\triangle PF_1 F_2$ 的内切圆与y轴相切, 则该双曲线的离心率为( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{2} + 1$       C.  $\sqrt{3} + 1$       D.  $2\sqrt{3} + 2$

12. 宋神宗熙宁九年文学家苏轼在《水调歌头·明月几时有》中有一名句“月有阴晴圆缺”表达了他超脱的胸怀。而球被平面截下的一部分叫做球缺, 截面叫做球缺的底面, 垂直于截面的直

径被截下的线段长叫做球缺的高，球缺的体积公式  $V = \frac{\pi}{3}(3R - h)h^2$ ，其中  $R$  为球的半径， $h$  为球缺的高。现有一球与一棱长为 2 的正方体的各棱均相切，若往该正方体内投点，则该点不在球内部的概率为 ( )

- A.  $1 - (\frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{5})\pi$     B.  $1 - (\frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3})\pi$     C.  $1 - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\pi$     D.  $1 - (\frac{5}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{16})\pi$

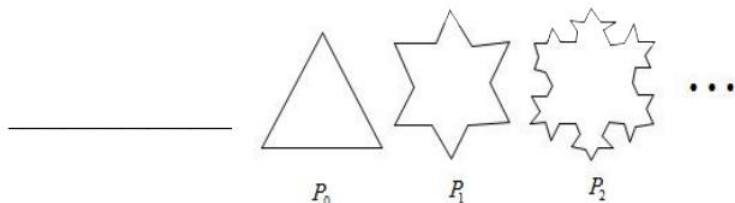
二、填空题 (本大题共 4 小题，共 20.0 分)

13. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq 2 \\ x \leq 3 \\ x + 2y - 5 \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = -x + y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

14. 已知向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $120^\circ$ ， $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$ ，则  $|\vec{b}| =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ， $g(x) = 2^x + a$ ，若对  $\forall x_1 \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ， $\exists x_2 \in [1, 2]$ ，使得  $f(x_1) \leq g(x_2)$ ，则实数  $a$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

16. 如图，有一列曲线  $P_0, P_1, P_2, \dots$  已知  $P_0$  所围成的图形是面积为 1 的等边三角形， $P_{k+1}$  是对  $P_k$  进行如下操作得到：将  $P_k$  的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )。记  $S_n$  为曲线  $P_n$  所围成图形的面积。则数列  $\{S_n\}$  的通项公式



三、解答题共 70 分 解答题写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(一) 必考题 (17~21 题 5 小题，共 60 分)

17. 在  $\triangle ABC$  中，以  $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边，且  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a = 3, b = 2$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.



18. 江西省作为全国第四批启动高考综合改革的7个省份之一,从2021年秋季学期起启动实施高考综合改革,实行高考科目“3+1+2”模式。“3”指语文、数学、外语三门统考学科,以原始分计入高考成绩;“1”指考生从物理、历史两门学科中“首选”一门学科,以原始分计入高考成绩;“2”指考生从政治、地理、化学、生物四门学科中“再选”两门学科,以等级分计入高考成绩.按照方案,再选学科的等级分赋分规则如下,将考生原始成绩从高到低划分为A, B, C, D, E五个等级,各等级人数所占比例及赋分区间如下表:

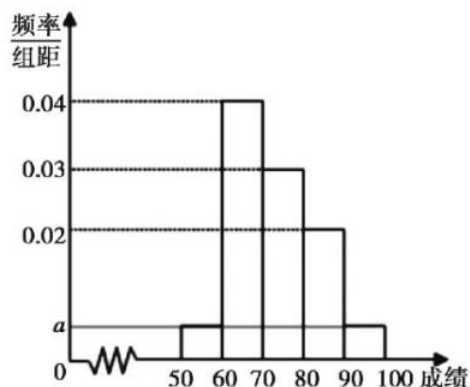
等级	A	B	C	D	E
人数比例	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	[86,100]	[71,85]	[56,70]	[41,55]	[30,40]

将各等级内考生的原始分依照等比例转换法分别转换到赋分区间内,得到等级分,转换公式为

$$\frac{Y_2 - Y}{Y - Y_1} = \frac{T_2 - T}{T - T_1}$$

其中 $Y_1, Y_2$ 分别表示原始分区间的最低分和最高分, $T_1, T_2$ 分别表示等级赋分区间的最低分和最高分, $Y$ 表示考生的原始分, $T$ 表示考生的等级分,规定原始分为 $Y_1$ 时,等级分为 $T_1$ ,计算结果四舍五入取整.某次化学考试的原始分最低分为50,最高分为98,呈连续整数分布,其频率分布直方图如下:

其频率分布直方图如下:



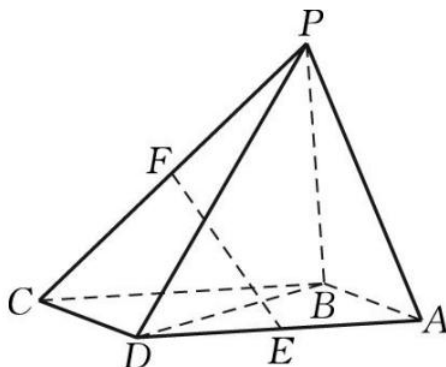
- (1)同一组数据以该组区间的中点值作代表,求实数 $a$ 的值并估计本次考试的平均分;
- (2)按照等级分赋分规则,估计此次考试化学成绩A等级的原始分区间;
- (3)用估计的结果近似代替原始分区间,若某学生化学成绩的原始分为90,试计算其等级分.



19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,  $PB \perp$ 底面 $ABCD$ ,  $BA = \sqrt{2}$ ,  $AD = 2$ ,  $PB = \sqrt{3}$ , 直线 $PD$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ,  $E, F$ 分别是棱 $AD, PC$ 的中点.

(1) 求异面直线 $EF$ 与 $AB$ 所成角的正切值;

(2) 求三棱锥 $P-BAD$ 外接球的体积.



20. 设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

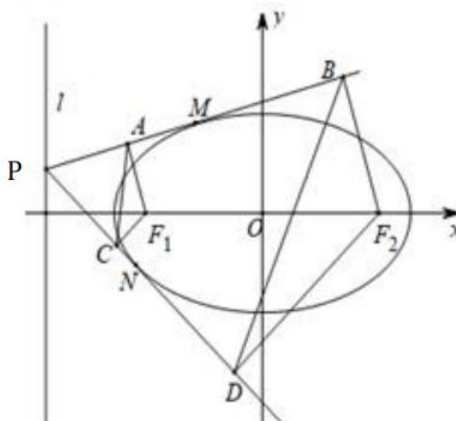
(1) 若 $a = b = c$ ,  $f(4) = 8$ , 求 $a$ 的值;

(2) 若 $a \neq b$ ,  $b = c$ , 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;

21. 如图, 已知 $F_1, F_2$ 为椭圆 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点. 动点 $P$ 在直线 $l: x = -3$ 上, 过 $P$ 作 $E$ 的两条切线, 切点分别为 $M, N$ , 过 $F_1, F_2$ 分别向 $PM, PN$ 作垂线, 垂足分别为 $A, B, C, D$ .

(1) 证明:  $|F_1A| \cdot |F_2B|$ 为定值;

(2) 记 $\triangle AF_1C$ 和 $\triangle BF_2D$ 的面积分别为 $S_1, S_2$ , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

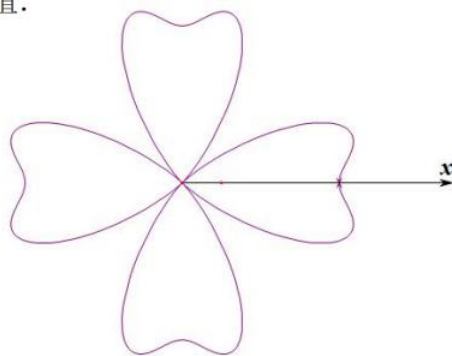


(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 杭州 2022 年第 19 届亚运会 (The 19th Asian Games Hangzhou 2022), 简称“杭州 2022 年亚运会”, 将在中国浙江杭州举行, 原定于 2022 年 9 月 10 日至 25 日举办; 2022 年 7 月 19 日亚洲奥林匹克理事会宣布将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日举办, 赛事名称和标识保持不变. 某高中体育爱好者为纪念在我国举办的第三次亚运会, 借四叶草具有幸福幸运的象征意义, 准备设计一枚四叶草徽章捐献给亚运会. 如图, 在极坐标系  $Ox$  中, 方程  $\rho = 2(1 + \cos 4\theta + \sin^2 4\theta)$  表示的图形为“四叶草”对应的曲线  $C$ .

(1) 设直线  $l: \theta = \frac{\pi}{12} (\rho \in \mathbb{R})$  与  $C$  交于异于  $O$  的两点  $A, B$ , 求线段  $AB$  的长;

(2) 设  $P$  和  $Q$  是  $C$  上的两点, 且  $\angle POQ = \frac{\pi}{8}$ , 求  $|OP| + |OQ|$  的最大值.



23. 已知  $a > 0, b > 0, c > 0$ , 设函数  $f(x) = |x - b| + |x + c| + a, x \in \mathbb{R}$

(1) 若  $a = b = c = 1$ , 求不等式  $f(x) < 5$  的解集;

(2) 若函数  $f(x)$  的最小值为 1, 证明:  $\frac{1}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{9}{c+a} \geq 18(a+b+c)$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线  
微信号：zizzsw



自主选拔在线  
微信号：zizzsw



自主选拔在线  
微信号：zizzsw