# 2024 届新高三开学联考

## 数学参考答案及解析

**一、单选题**

1. B 【解析】因为 $z^2=-1$，所以 $z=\pm i$，又复数 $z$ 的虚部小于 0，所以 $z=-i$，所以 $z(1-z)=-i(1+i)=1-i$. 故选 B.

2. A 【解析】由 $1-x^2>0$ 得，$-1<x<1$，所以 $M=\{0\}$，$M\cap N=\{0\}$. 故选 A.

3. C 【解析】如图所示，可求得器皿中雪表面的半径为 $\frac{20+40}{4}=15$ cm，所以平地降雪厚度的近似值为 $\frac{\frac{1}{3}\pi\times20\times(10^2+15^2+10\times15)}{\pi\times20^2}=\frac{95}{12}$ cm. 故选 C.

4. D 【解析】设公差为 $d$，则 $a_6=a_3+(6-3)d=a_3+3d=2a_3$，$a_3=3d$，$S_{17}=\frac{(a_1+a_{17})\times17}{2}=\frac{2a_9\times17}{2}=17a_9$，$a_9=a_6+3d=3a_3$，则 $\frac{S_{17}}{a_3}=\frac{17\times3a_3}{a_3}=51$. 故选 D.

5. C 【解析】由 $a^{\log_3 a}=3^{\log_3 81}$，两边取对数得 $\log_3 a^{\log_3 a}=\log_3 81$，所以 $(\log_3 a)^2=4$，所以 $\log_3 a=2$ 或 $-2$，所以 $a=9$ 或 $\frac{1}{9}$. 故选 C.

6. D 【解析】因为 $f(0)=\frac{1}{2}$，$\varphi\in[0,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，可以验证：此时 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递增，舍去；当 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ 时，可以验证：此时 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递减，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

7. B 【解析】将 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 与 $y=x^2$ 联立得，$A\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$，$B\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)$，所以 $AB$ 的长为 $\sqrt{2}\cdot|x_A-x_B|=2$，由已知得，直线 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 经过抛物线的焦点，且 $l:y=-\frac{1}{4}$ 为准线，所以 $|PQ|=\frac{|AB|}{2}=1$，所以 $\triangle QAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_A-x_B|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

8. D 【解析】令 $f(x)=x+\sin x$，$g(x)=\ln(x+1)$，$h(x)=e^x-1$，$p(x)=h(x)-f(x)=e^x-1-x-\sin x$，$q(x)=h(x)-g(x)=e^x-1-\ln(x+1)$，$p'(x)=e^x-1-\cos x$，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，令 $m(x)=p'(x)$，$m'(x)=e^x+\sin x$，当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $p'(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时单调递增，所以当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$p'(x)<p'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1-\cos\frac{1}{2}<\sqrt{e}-1-\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{e}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，所以 $p(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时单调递减，所以 $p(0.001)<p(0)=0$，所以 $c<a$；当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}\geqslant0$，所以 $q(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $q(0.001)>q(0)=0$，所以 $c>b$，综上，$a>c>b$. 故选 D.

**二、选择题**

9. ABC 【解析】铁棍的长度从小到大排列为 3.61，3.62，3.62，3.62，3.63，3.63，3.64，3.65(单位：cm). 对于 A：极差为 $3.65-3.61=0.04$，故 A 正确；对于

B:众数为3.62,故B正确;对于C:中位数为$\frac{3.62+3.63}{2}=3.625$,故C正确;对于D:因为$8\times 80\%=6.4$,所以铁棍的第80百分位数为从小到大排列的第7个数,是3.64,所以D不正确.故选ABC.

10. BC 【解析】$x^2+y^2-2x-6=0$变为$(x-1)^2+y^2=7$,所以$C$的坐标为$(1,0)$,$|MC|=\sqrt{7}$,故A错误;直线$l$过点$A$,则$-1=1+b$,$b=-2$,所以$C$到直线$l$的距离为$\frac{|1-2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故B正确;$\sqrt{7}-1=r-|CA|\leqslant|MA|\leqslant r+|CA|=\sqrt{7}+1$,故C正确;圆$C$与$x$轴相交所得的弦长为$2\sqrt{7}$,圆$C$与$y$轴相交所得的弦长为$2\sqrt{6}$,所以圆$C$与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times 2\sqrt{6}=2\sqrt{42}$,故D错误.故选BC.

11. ABD 【解析】设$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$的夹角为$\alpha$,则$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|}=\frac{1}{2}$,所以$\alpha=\frac{\pi}{3}$,所以A正确;因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$,所以$\boldsymbol{a}=\frac{2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{3}$,$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2}{3}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{2\boldsymbol{e}_1^{\,2}-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2^{\,2}}{9}=\frac{2-1+\frac{1}{2}-1}{9}=\frac{1}{18}$,所以B正确;$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_1-\lambda\boldsymbol{e}_2)=\frac{1}{3}((2+\lambda)\boldsymbol{e}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{e}_2)$,因为$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}$,所以$\frac{2+\lambda}{1}=\frac{1-\lambda}{-1}$,$\lambda$不存在,所以C不正确;设$D$为$AB$的中点,则$\overrightarrow{CD}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}=\frac{\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2}{6}$,所以$|\overrightarrow{CD}|=\frac{\sqrt{\boldsymbol{e}_1^{\,2}+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^{\,2}}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{6}$,所以D正确.故选ABD.

12. BD 【解析】由$x^2-y^2-xy=2$整理得,$y^2+xy+2-x^2=0$,因为$\Delta=x^2-4(2-x^2)=5x^2-8\geqslant 0$,所以$|x|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$,所以A不正确,B正确;令$x+y=t$,即$y=-x+t$,代入$x^2-y^2-xy=2$得,$x^2+tx-(t^2+2)=0$,所以$\Delta=t^2+4(t^2+2)=5t^2+8>0$,所以$t\in\mathbf{R}$,即$x+y\in\mathbf{R}$,所以C错误;令$x^2+y^2=t$,$t>0$,所以$x=\sqrt{t}\cos\theta$,$y=\sqrt{t}\sin\theta$,因为$x^2-y^2-xy=2$,所以$t\cos^2\theta-t\sin^2\theta-\sqrt{t}\cos\theta\cdot\sqrt{t}\sin\theta=2$,所以$t=\frac{2}{\cos 2\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}}=\frac{4}{2\cos 2\theta-\sin 2\theta}=\frac{4}{\sqrt{5}\cos(2\theta+\varphi)}$,所以$|t|\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$,即$x^2+y^2\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以D正确.故选BD.

## 三、填空题

13. $\frac{5}{6}$ 【解析】$\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.故答案为$\frac{5}{6}$.

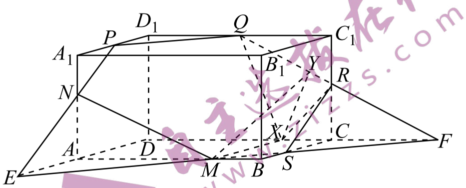
14. $\frac{17}{8}$ 【解析】令$\sqrt{1-x}=t(t\geqslant 0)$,则$x=1-t^2$,$y=-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}(t\geqslant 0)$,所以$y_{\max}=\frac{17}{8}$.故答案为$\frac{17}{8}$.

15. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 【解析】设$C$的半焦距为$c$,则$F(-c,0)$关于直线$y=-x$的对称点$P$的坐标为$(0,c)$,因为$P$落在$C$上或$C$内,所以$b\geqslant c$,所以$a^2-c^2=b^2\geqslant c^2$,所以$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.故答案为$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

16. $\frac{27\sqrt{65}}{65}$ 【解析】如图所示,在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,因为$AB=BC=3$,$BS=1$,所以$BM=1$,延长$SM$与$DA$的延长线交于$E$,再连接$PE$,$PE$与$A_1A$的交点为$N$,同理确定$R$.因为$AE\parallel BS$,所以$\frac{AM}{BM}=\frac{AE}{BS}$,因为$BS=BM=1$,$AM=2$,所以$AE=2$,因为$A_1D_1=3$,$P$为$A_1D_1$的中点,所以$A_1P=\frac{3}{2}$,因为$A_1P\parallel AE$,所以$\frac{A_1P}{AE}=\frac{A_1N}{AN}$,又$A_1A=2$,

所以 $AN=\frac{8}{7}$，同理 $CR=\frac{8}{7}$，$C_1R=\frac{6}{7}$，在 $CD$ 上取一点 $X$，使得 $CX=1$，过 $X$ 作 $XY$ 与 $QR$ 垂直，垂足为 $Y$，连接 $MX$，可以证明：$MY\perp QR$，且 $MX=3$. 因为 $S_{\triangle XQR}=S_{XCC_1Q}-S_{\triangle XCR}-S_{\triangle QC_1R}=\frac{9}{7}$，$QR=\sqrt{C_1Q^2+C_1R^2}=\frac{3\sqrt{65}}{14}$，所以 $\frac{1}{2}QR\cdot XY=\frac{9}{7}$，所以 $XY=\frac{12}{\sqrt{65}}$，所以 $MY=\sqrt{MX^2+XY^2}=\frac{27\sqrt{65}}{65}$.

故答案为 $\frac{27\sqrt{65}}{65}$.




## 四、解答题

17. **解**：(1) 因为 $(a-c)^2=b^2-(2-\sqrt{2})ac$，

所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，　　(2 分)

由余弦定理得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　　(4 分)

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.　　(5 分)

(2) $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，　　(6 分)

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，　　(7 分)

所以 $\frac{l}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，　　(8 分)

所以 $b=\frac{l\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$=\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}$.　　(10 分)

18. **解**：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，

因为 $a_1,\frac{5}{8},a_3$ 成等差数列，所以 $a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}$，

因为 $S_3=\frac{7}{4}$，所以 $a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{7}{4}$，　　(2 分)

相减得 $a_1q=\frac{1}{2}$，所以 $q=\frac{1}{2a_1}$，

代入 $a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}$ 得 $4a_1^2-5a_1+1=0$，

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\ q=2\end{cases}$，　　(4 分)

因为 $a_{n+1}<a_n(\forall n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\begin{cases}a_1=1,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$.　　(6 分)

(2) 由已知得，$b_n=-n\cdot 2^n$，　　(7 分)

$T_n=-[1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot 2^n]$，　　(8 分)

所以 $2T_n=-[1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)2^n+n\cdot2^{n+1}]$，

两个等式相减得 $-T_n=-(2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1})$，　　(10 分)

所以 $T_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$.　　(12 分)

19. **解**：(1) 因为 $E,F$ 分别为 $PD,PB$ 的中点，所以 $EF/\!/BD$，　　(1 分)

因为 $EF\not\subset$ 平面 $BDG$，$BD\subset$ 平面 $BDG$，

所以 $EF/\!/$ 平面 $BDG$.　　(3 分)

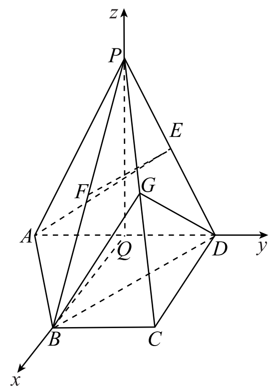
(2) 因为三角形 $PAD$ 是正三角形，$Q$ 为 $AD$ 的中点，

所以 $PQ\perp AD$，

又因为 $CD\perp PQ$，$AD\cap CD=D$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$，$BQ\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PQ\perp BQ$，

因为四边形 $BCDQ$ 是矩形，所以 $BQ\perp AD$，即直线 $QP,AD,QB$ 两两垂直，　　(5 分)

以 $Q$ 为坐标系的原点，射线 $QB,QD,QP$ 分别为 $x,y,z$ 轴建立空间直角坐标系，




(6 分)

因为四边形 $BCDQ$ 是面积为 2 的矩形,$BC=QD=1$,所以 $BQ=2$,

由已知得,$P(0,0,\sqrt{3})$,$B(2,0,0)$,$C(2,1,0)$,$D(0,1,0)$, (8 分)

所以 $\overrightarrow{PC}=(2,1,-\sqrt{3})$,$G\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (10 分)

设平面 $BGD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{BG}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$,

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{BG}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,

$\therefore\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -2x+y=0\end{cases}$,

令 $x=1$,得 $y=2$,$z=0$.

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,2,0)$,设 $PC$ 与平面 $BGD$ 所成的角为 $\theta$,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以 $PC$ 与平面 $BGD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(12 分)

20. **解**:(1)设 $E$ 的半焦距为 $c$,因为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为$(2,0)$,所以 $c=2$, (1 分)

因为 $E$ 的离心率为 2,所以 $a=1$,$b^2=c^2-a^2=3$,

(3 分)

所以双曲线 $E$ 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. (4 分)

(2)当直线 $l$ 的斜率为 0 时,显然不适合题意;当直线 $l$ 的斜率不为 0 时,

设直线 $l:x=my+2\left(m\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}x=my+2\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}$,消去 $x$,得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$, (6 分)

$3m^2-1\neq0$ 且 $\Delta=(12m)^2-36(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$,

$y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2-1}$,$y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$, (7 分)

所以 $x_1x_2=(my_1+2)(my_2+2)=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4$

$=m^2\cdot\frac{9}{3m^2-1}-\frac{24m^2}{3m^2-1}+4=\frac{3m^2+4}{3m^2-1}$, (9 分)

令 $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3m^2+4}{3m^2-1}+\frac{9}{3m^2-1}=0$,

解得,$m=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$,此时 $OA\perp OB$, (11 分)

所以存在直线 $l:\sqrt{3}x\pm\sqrt{5}y-2\sqrt{3}=0$,使 $OA\perp OB$ 成立. (12 分)

21. **解**:(1)由已知得,$X=0,20,40$,

$P(X=0)=C_2^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$P(X=20)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$,

$P(X=40)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 20 | 40 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

(3 分)

由已知得，$Y=20,40$，

所以 $P(Y=40)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$，

$P(Y=20)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

所以 $Y$ 的分布列为

| Y | 20 | 40 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

(6 分)

(2)甲在第二轮得分分类如下：

选 20 分和 30 分的题所得分数为 20 分和 50 分，

选 20 分和 40 分的题所得分数为 20 分和 60 分，

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分、30 分、40 分和 70 分，　(7 分)

乙在第二轮得分分类如下：

选 20 分和 30 分的题所得分数为 0 分、20 分、30 分和 50 分，

选 20 分和 40 分的题所得分数为 0 分、20 分、40 分和 60 分，

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分、30 分、40 分和 70 分，　(8 分)

由已知及(1)得，

甲两轮的总积分不低于 90 分的概率为

$P_{甲}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{5}{36}$；　(9 分)

乙两轮的总积分不低于 90 分的概率为，

$P_{乙}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{48}$，　(11 分)

因为 $P_{甲}>P_{乙}$，所以甲更容易晋级复赛.　(12 分)

22. **解**：(1) $f'(x)=\frac{1}{x+1}$，

设切点的坐标为 $(x_0,f(x_0))$，

则切线方程为 $y-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}(x-x_0)$，

因为切线过点 $(-1,-1)$，

所以 $-1-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}(-1-x_0)$，

解得 $x_0=0$，

所以切线方程为 $y=x$.　(3 分)

(2)① 令 $h(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$，$h'(x)=e^x-x-1$，令 $h'(x)=m(x)$，

则 $m'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$m'(x)=e^x-1>0$，

所以 $m(x)=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h'(x)>h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=0$，

即当 $x>0$ 时，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$；　(6 分)

② $g(x)=\ln(x+1)+ae^x$，$g'(x)=ae^x+\frac{1}{x+1}$，

若 $a\geqslant0$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，最多只有一个零点，不符合题意；　(7 分)

若 $a<0$，$g'(x)=ae^x+\frac{1}{x+1}=\frac{a}{x+1}\left[e^x(x+1)+\frac{1}{a}\right]$，令 $n(x)=(x+1)e^x$，因为 $x+1>0$，$e^x>0$，且 $n'(x)=(x+2)e^x$，当 $x>-1$ 时，$n'(x)>0$，所以 $n(x)=(x+1)e^x$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为当 $x\to-1$ 时，$(x+1)e^x\to0$；当 $x\to+\infty$ 时，

$(x+1)e^x \to +\infty$，

又因为$-\frac{1}{a}>0$，

所以$-\frac{1}{a}=(x+1)e^x$恰有一解$x=x_0$，

当$x\in(-1,x_0)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，所以$x_0$为函数$g(x)$的唯一的极大值点， （8分）

因为当$x\to -1$时，$g(x)=ae^x+\ln(x+1)\to -\infty$，

当$x\to+\infty$时，$g(x)=ae^x+\ln(x+1)\to-\infty$，

所以函数$g(x)$有两个不同的零点$x_1,x_2$等价于$g(x_0)>0$，即$ae^{x_0}+\ln(x_0+1)>0$， （9分）

不妨设$x_2>x_1$，

当$x\in(-1,0]$，$g(x)<0$，所以$x_2>x_1>0$，

由(1)得，直线$y=x$与函数$y=\ln(x+1)$切于原点得：当$x>0$时，$\ln(x+1)<x$，

因为$a<0$，所以当$x>0$时，$g(x)=ae^x+\ln(x+1)<a\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+x=\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a$，

令$q(x)=\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a$，

即当$x>0$时，$g(x)<q(x)$， （10分）

所以$\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a=0$一定存在两个不同的根，设为$x_3,x_4(x_3<x_4)$，

因为$x_2>0$，

所以$q(x_2)>g(x_2)=0=q(x_4)$，

又因为$x_2,x_4$位于单调递减区间，

所以$x_2<x_4$，同理$x_1>x_3$，

所以$x_3<x_1<x_2<x_4$，所以$x_4>x_2>0$，

因为$x_3x_4=2>0$，所以$x_3>0$，

又因为$x_3+x_4=-\frac{2(a+1)}{a}$，

所以$x_4-x_3=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}$

$=\sqrt{\frac{4(a+1)^2}{a^2}-8}$

$=2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$，

所以$|x_2-x_1|<2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$. （12分）