河北省“五个一”名校联盟

高一年级联考（2023.06）

数学试卷

命题单位：石家庄市第一中学

（满分：150 分，测试时间：120 分钟）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$,则下列选项中与 $\vec{a}$ 共线的单位向量是

A．$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$；　B．$(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$　C．$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　D．$(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

【解析】：B

2．某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生，已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生，则正确的

A. 高中部产生 20 个样本　*B.* 初中部产生 20 个样本

C. 不同级部每个学生被抽取的可能性不相同　*D.* 可以从两个级部各抽取 30 个样本

【解析】：A

3．已知 i 为虚数单位，若复数 $z=\frac{(1+i)^2}{1-i}$,则下列四个选项正确的是

A．复数 $|z|=2$　B．若 $\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数，则 $\overline{z}=-1-i$

C．复数 z 的虚部为 i　D．复数 z 在复平面内对应的点位于第一象限

【解析】：$z=\frac{(1+i)^2}{1-i}=-1+i$，所以 B 正确

4．已知 ΔABC 的周长为 20，面积为 $10\sqrt{3}$，$A=60^\circ$，则 BC 边的长为

A．5　B．6　C．7　D．8

【解析】：由题知 $a+b+c=20$，$\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$.所以 $bc=40$.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ=(b+c)^2-3bc=(20-a)^2-120$.所以 $a=7$.即 BC 边的长为 7.所以 C 正确.

5．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(1,-\sqrt{3})$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

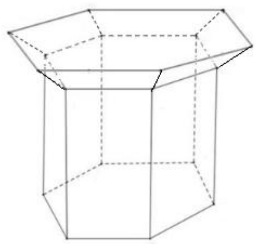
【解析】$\because \vec{a}=(1,-\sqrt{3}),\therefore|\vec{a}|=2,\because|\vec{b}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，

$\therefore(\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4,\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

$\therefore\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，由于 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in[0,\pi]$

$\therefore$向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$.故选：D

6．元宵节是春节之后的第一个重要节日，元宵节又称灯节，很多地区家家户户都挂花灯．右图是小明为自家设计的一个花灯，该花灯由上面的正六棱台与下面的正六棱柱组成，正六棱台的上下两个底面边长分别为 20cm 和 40cm，正六棱台与正六棱柱的高分别为 10cm 和 60cm，则该花灯的体积约为



A．$46000\sqrt{3}cm^3$　　B．$48000\sqrt{3}cm^3$

C．$50000\sqrt{3}cm^3$　　D．$52000\sqrt{3}cm^3$

【解析】;由题意花灯的体积等于上面的正六棱台体积与下面的正六棱柱体积的和，正六棱台的上下两个底面积分别为

$S_1=6\times\dfrac{1}{2}\times20\times20\times\sin60^\circ=600\sqrt{3},S_2=6\times\dfrac{1}{2}\times40\times40\times\sin60^\circ=2400\sqrt{3}$，

所以花灯的体积

$$V=60S_1+\frac{1}{3}\times10\times\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)$$
$$=60\times600\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times10\times\left(600\sqrt{3}+2400\sqrt{3}+\sqrt{600\sqrt{3}\times2400\sqrt{3}}\right)$$

$=50000\sqrt{3}$，故选 C.

7．已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120^\circ$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O$ 为 45°，则

A.该圆锥的体积为 2π　　B.该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC=2\sqrt{2}$　　　　D.过圆锥任意两条母线的截面中面积最大的为ΔAPB

【解析】:C

8.已知$0<x_1<x_2<2\pi$，$\overrightarrow{OA}=(x_1,\sin x_1),\overrightarrow{OB}=(x_2,\sin x_2)$，且$\sin x_1=\sin x_2=\frac{1}{3}$，令$\vec{a}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，则$\cos|\vec{a}|=$

A．$\frac{7}{9}$　　　B．$-\frac{7}{9}$　　　C．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　　D．$-\frac{\sqrt{7}}{3}$

【解析】：由$\sin x_1=\sin x_2$，所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$，故$x_2=\pi-x_1$，所以$x_1-x_2=2x_1-\pi$，

$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|x_1-x_2|=|2x_1-\pi|=\pi-2x_1$

所以$\cos|\vec{a}|=\cos\left(\pi-2x_1\right)=-\cos 2x_1=2\sin^2 x_1-1=-\frac{7}{9}$．故选 B．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．设z_1，z_2为复数，则下列命题中一定成立的是

A．如果$z_1-z_2>0$，那么$z_1>z_2$　　　B．如果$|z_1|=|z_2|$，那么$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$

C．如果$|\frac{z_1}{z_2}|>1$，那么$|z_1|>|z_2|$　　　D．如果$z_1^2+z_2^2=0$，那么$z_1=z_2=0$

【解析】：对于A项，取$z_1=3+i$，$z_2=1+i$时，$z_1-z_2=2>0$，但虚数不能比较大小，故A项错误；对于B项，由$|z_1|=|z_2|$，得$|z_1|^2=|z_2|^2$．又$z_1\overline{z_1}=|z_1|^2$，$z_2\overline{z_2}=|z_2|^2$，所以$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$，故$B$项正确；

对于C项，因为$|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}>1$，所以$|z_1|>|z_2|$，故$C$项正确；

对于D项，取$z_1=1$，$z_2=i$，满足$z_1^2+z_2^2=0$，但是$z_1\neq z_2\neq 0$，故D项错误．故选：BC．

10．小明在一次面试活动中，10 位评委给他的打分分别为：70、85、86、88、90、90、92、94、95、100．则下列说法正确的有

A．这 10 个分数的中位数为 90

B．这 10 个分数的第 60 百分位数为 91

C．这 10 个分数的平均数大于中位数

D．去掉一个最低分和一个最高分后，平均分数会变大，而分数的方差会变小

【解析】； A 正确；

又$10\times60\%=6$，所以第 60 百分位数是第 6 个数 90 与第 7 个数 92 的平均数，即$\dfrac{90+92}{2}=91$，所以 B 正确；

对于 C 选项：方法 1：平均数相对于中位数总在“拖尾”的一则，所以 C 错误；

方法 2：这 10 个数的均值为$\dfrac{70+85+86+88+90+90+92+94+95+100}{10}=89$分，中位数为$10\times50\%=5$，所以中位数是第 5 个数 90 与第 6 个数 90 的平均数 90，所以 C 错误；

对于 D 选项：方法 1：去掉 70 和 100 后余下的 85、86、88、90、90、92、94、95 这 8 个数的大小分布更均匀，平均分为 90，所以 D 正确；

方法 2：这 10 个数的方差为

$$\frac{(70-89)^2+(85-89)+(86-89)^2+(88-89)^2+2\times(90-89)^2+(92-89)^2+(94-89)^2+(95-89)^2+(100-89)^2}{10}=58$$

，去掉 70 和 100 后，平均数为$\dfrac{85+86+88+90+90+92+94+95}{8}=90$，方差为

$$\frac{(85-90)^2+(86-90)^2+(88-90)^2+2\times(90-90)^2+(92-90)^2+(94-90)^2+(95-90)^2}{8}=11.25，$$

90>89, $11.25<58$，所以 D 正确.

故选 ABD.

11．已知$\omega>0$，函数$f(x)=\cos(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$，下列选项正确的有

A．若$f(x)$的最小正周期$T=2$,则$\omega=\pi$

B．当$\omega=2$时，函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$后得到$g(x)=\cos 2x$的图象

C．若$f(x)$在区间$(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$上单调递增，则ω的取值范围是$\left[1,\dfrac{5}{3}\right]$

D．若$f(x)$在区间$(0,\pi)$只有一个零点，则ω的取值范围是$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{7}{6}\right]$

【解析】:由$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2$，得$\omega=\pi$，所以 A 正确；

当$\omega=2$时，$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$，所以函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度后得

$f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\neq g\left(x\right)$，所以 B 错误；

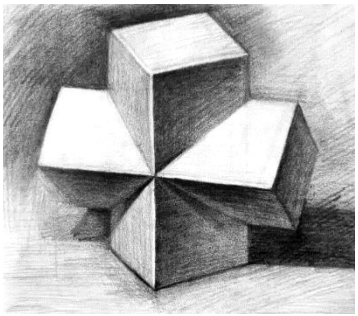
若 $f(x)$ 在 $(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 上单调增，则 $\begin{cases}\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\geq\pi+2k\pi\\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\leq 2\pi+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $1+3k\leq\omega\leq\frac{5}{3}+2k$，

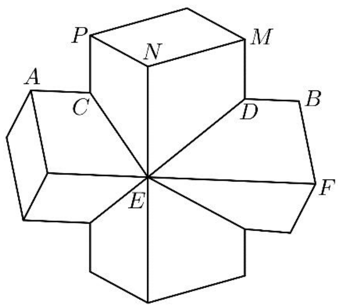
$k\in\mathbf{Z}$，又 $\omega>0$，只有当 $k=0$ 时，$1\leq\omega\leq\frac{5}{3}$ 成立，所以 C 正确；

若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点，则 $\begin{cases}\pi\omega+\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{2}\\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\leq\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{1}{6}<\omega\leq\frac{7}{6}$，所以 D 正确.

故选 ACD.

12．素描是使用单一色彩表现明暗变化的一种绘画方法，素描水平反映了绘画者的空间造型能力．“十字贯穿体”是学习素描时常用的几何体实物模型，如图是某同学绘制“十字贯穿体”的素描作品．“十字贯穿体”是由两个完全相同的正四棱柱“垂直贯穿”构成的多面体，其中一个四棱柱的每一条侧棱分别垂直于另一个四棱柱的每一条侧棱，两个四棱柱分别有两条相对的侧棱交于两点，另外两条相对的侧棱交于一点（该点为所在棱的中点）．若该同学绘制的“十字贯穿体”由两个底面边长为2，高为6的正四棱柱构成，则（　　）





A．一个正四棱柱的某个侧面与另一个正四棱柱的两个侧面的交线互相垂直

B．该“十字贯穿体”的表面积是 $112-16\sqrt{2}$

C．该“十字贯穿体”的体积是 $48-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

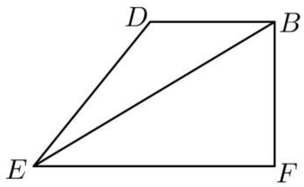
D．CE 与 BF 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】BCD

【解析】如图一个正四棱柱的某个侧面与另一个正四棱柱

的两个侧面的交线 CE、DE

则在梯形 $BDEF$ 中，可知 $BD=3-\sqrt{2}$， $BF=2,EF=3,DE=\sqrt{6},BE=\sqrt{13}$

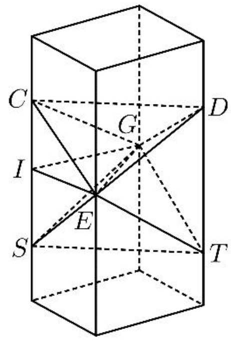


设 $\angle DEF=\alpha,\angle BEF=\beta$，则 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

根据立体图可得 $CD=2\sqrt{2}$， $CE=DE=\sqrt{6}$，

显然 $CE^2+DE^2\neq CD^2$

即 CE、DE 不垂直，A 不正确；



该“十字贯穿体”的表面积是由 4 个正方形和 16 个与梯形 $BDEF$ 全等的梯形组成

则表面积 $S=4\times4+16\times\dfrac{3+3-\sqrt{2}}{2}\times2=112-16\sqrt{2}$，B 正确；

如图两个正四棱柱的重叠部分为多面体 $CDGEST$，取 CS 的中点 I

则多面体 $CDGEST$ 可以分成 8 个全等三棱锥 $C-GEI$，则

$V_{C-GEI}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

该“十字贯穿体”的体积即为 $V=2\times24-8V_{C-GEI}=48-\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$，C 正确；

CE 与 BF 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，D 正确；故选：BCD．

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把正确答案填在答题卡上．

13．已知向量 $\vec{a}=(1,2)$， $\vec{b}=(-3,x)$，若 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则 $x=$________．

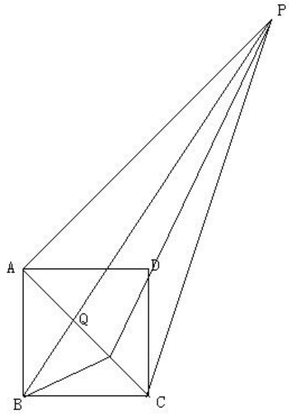
【解析】： $x=4$．

14. 若复数 z 满足 $z-1=\cos\theta+i\sin\theta$（$\theta$ 为实数），则 $|\overline{z}|$ 的最大值为__________．

【解析】:2

15．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $PA=4\sqrt{2}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球表面积为________；若点 Q 是线段 AC 上的动点，则 $|PQ|+|QB|$ 的最小值为_________．(第一空 2 分，第二空 3 分)

【解析】：设 PC 中点为 O，则 $OP=OC=OD=OB=OA=\sqrt{10}$，所以 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心，$\sqrt{10}$ 为该球半径，所以其表面积为 $4\pi\left(\sqrt{10}\right)^2=40\pi$；如图，将ΔPAC 绕 AC 翻折到与ΔDAC 所在面重合，连接 PB，交 AC 于点 Q，此时 $|PQ|+|QB|$ 最小，最小值为



$$\sqrt{|AB|^2+|AP|^2-2|AB|\cdot|AP|\cos135^\circ}$$

$$=\sqrt{4+32-2\times2\times4\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=2\sqrt{13}$$

16．已知三角形 ABC 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $a^2=b^2+2bc\sin A$，A 为锐角，则 $\tan A-9\tan B$ 的最小值为________.

【解析】：$a^2=b^2+2bc\sin A=b^2+c^2-2bc\cos A\to c=2b(\sin A+\cos A)$，

$\sin(A+B)=2\sin B(\sin A+\cos A)\to\tan B=\dfrac{\tan A}{2\tan A+1}$，

$$\tan A-9\tan B=\tan A-\frac{9\tan A}{2\tan A+1}=\frac{2\tan A+1}{2}+\frac{9}{2\tan A+1}-5\ge-2$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程和演算步骤．

17．（10 分）已知复数 $z_1=4-m^2+(m-2)i$，$z_2=\lambda+\sin\theta+(\cos\theta-2)i$，其中 i 是虚数单位，$m,\lambda,\theta\in R$

(Ⅰ)若 z_1 为纯虚数，求 m 的值；

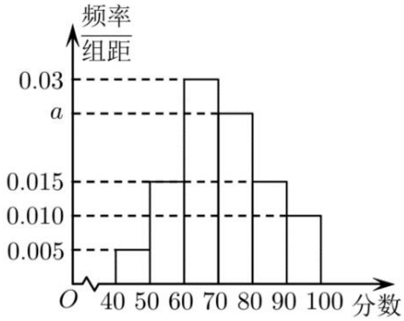
(Ⅱ)若 $z_1=z_2$，求 λ 的取值范围.

【解析】(Ⅰ) $m=-2$ …………5 分

(Ⅱ)由 $z_1=z_2$，$4-m^2=\lambda+\sin\theta,m-2=\cos\theta-2$.

因此 $\lambda=4-\cos^2\theta-\sin\theta=(\sin\theta-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}\in[\frac{11}{4},5]$ …………10 分

18.（12 分） 为了调查疫情期间物理网课学习情况，某校组织了高一年级学生进行了物理测试．根据测试成绩（总分 100 分），将所得数据按照 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 分成6 组，其频率分布直方图如图所示．



(Ⅰ)求图中 a 的值；

(Ⅱ)试估计本次物理测试成绩的平均分；（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）

(Ⅲ)该校准备对本次物理测试成绩优异（将成绩从高到低排列，排在前13% 的为优异）的学生进行嘉奖，则受嘉奖的学生分数不低于多少？

【解析】

(Ⅰ)由$(0.005+0.010+0.015\times2+a+0.030)\times10=1$，解得$a=0.025$；　...........3 分

(Ⅱ)$45\times0.05+55\times0.15+65\times0.3+75\times0.25+85\times0.15+95\times0.1=71$，

故本次防疫知识测试成绩的平均分为71；　...8 分

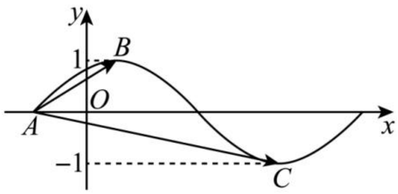
(Ⅲ)设受嘉奖的学生分数不低于x分，

因为$[80,90)$，$[90,100]$对应的频率分别为 0.15，0.1，

所以$(90-x)\times0.015+0.1=0.13$，解得$x=88$，

故受嘉奖的学生分数不低于88分．　...12 分

19. （12 分）如图是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，其中 B,C 分别为函数图象的最高和最低点.



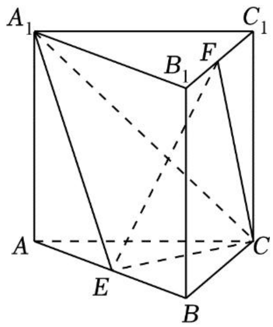
(Ⅰ)求 ω；

(Ⅱ)若 $f(2)-f\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ .

【解析】(Ⅰ)设 $A\left(x_0,0\right)$，函数的最小正周期为 T，则 $B\left(x_0+\frac{T}{4},1\right),C\left(x_0+\frac{3T}{4},-1\right)$，

则 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{T}{4},1\right),\overrightarrow{AC}=\left(\frac{3T}{4},-1\right)$，

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{T}{4},1\right)\cdot\left(\frac{3T}{4},-1\right)=\frac{3}{16}T^2-1=2$， ………………4 分



解得 $T=4$ (负值舍去)，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=4$，

所以 $\omega=\frac{\pi}{2}$； ……………6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，

$f(2)-f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

得 $\sin\left(\pi+\varphi\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $-\sin\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …………………9 分

又因 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{3}<\varphi+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$． ……12 分

20．(12 分)如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，E，F 分别是 AB，B_1C_1 的中点．

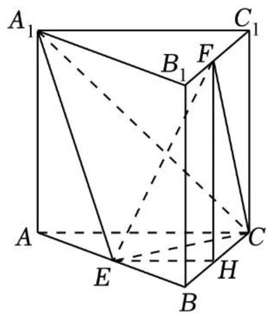
(Ⅰ)证明：$EF\perp BC$；

(Ⅱ)若 $AC=BC=2$，直线 EF 与平面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，

求三棱锥 B_1-A_1EC 的体积．

【解析】(Ⅰ)证明：取 BC 中点 H，分别连结 EH， FH，

因为 F 为 B_1C_1 的中点，所以， $FH//BB_1$，因为三棱柱为直棱柱，



所以 $BB_1\perp$平面 ABC，

所以 $FH\perp$平面 ABC，因为 $BC\subset$平面 ABC，所以 $FH\perp BC$，又 E 为 AB 的中点，则 $EH//AC$，且 $AC\perp BC$，所以 $EH\perp BC$，

因为 EH， $FH\subset$平面 EFH， $EH\cap FH=H$，所以 $BC\perp$平面 EFH，

因为 $EF\subset$平面 EFH，所以 $EF\perp BC$． ....6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\angle FEH$ 为 EF 与平面 ABC 所成的角，所以 $\angle FEH=\frac{\pi}{3}$，

由 $AC=BC=2$，得 $CC_1=\sqrt{3}$． ....8 分

$V_{B_1-A_1EC}=V_{C-B_1A_1E}=\frac{1}{3}S_{\Delta B_1A_1E}\cdot CE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$． ....12 分

21．(12 分)在△ABC 中，角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c， $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4\cos C$．

(Ⅰ)求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的值；

(Ⅱ)若 $\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$，求 $\cos A$．

【解析】(Ⅰ)△ABC 中，因为 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4\cos C$，

结合余弦定理，得 $\frac{a^2+b^2}{ab}=4\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，化简可得 $a^2+b^2=2c^2$，

所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=2$． ....4 分

(Ⅱ)由 $\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{\cos B}{\sin B}$，

可得 $\cos B=\frac{\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\frac{b^2}{ac}$，即 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2}{ac}$，即 $a^2+c^2=3b^2$， ....8 分

又 $a^2+b^2=2c^2$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$， $a=\frac{\sqrt{5}}{2}c$， ....10 分

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\frac{3}{4}c^2+c^2-\frac{5}{4}c^2}{2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}c}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$． ....12 分

22. （12 分）如图 1，在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别为AB，AC 的中点，O 为DE 的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$，将$\triangle ADE$ 沿 DE 折起到$\triangle A_1DE$ 的位置，使得平面 $A_1DE\perp$平面$BCED$，F 为 A_1C 的中点，如图 2

(Ⅰ)求证：$EF//$ 平面 A_1BD；

(Ⅱ)求证：平面 $A_1OB\perp$平面 A_1OC；

(Ⅲ)线段OC上是否存在点G，使得$OC\perp$平面 EFG？说明理由．

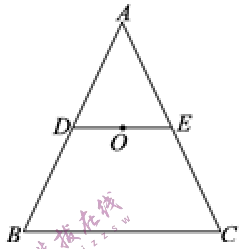


图 1

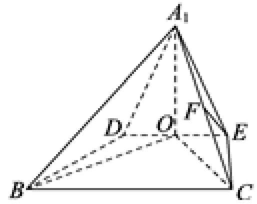


图 2

【解析】：(Ⅰ)取线段 A_1B 的中点H，连接HD，HF．

因为在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别为AB，AC 的中点，所以 $DE//BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$．

因为 H，F 分别为A_1B，A_1C 的中点，所以 $HF//BC$，$HF=\dfrac{1}{2}BC$，

所以 $HF//DE$，$HF=DE$，所以 四边形$DEFH$为平行四边形，所以 $EF//HD$．

因为 $EF\not\subset$平面A_1BD，$HD\subset$平面A_1BD，所以 $EF//$ 平面A_1BD． …………4 分

(Ⅱ)因为在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别为AB，AC 的中点，所以 $AD=AE$．

所以$A_1D=A_1E$，又O为DE 的中点，所以 $A_1O\perp DE$．

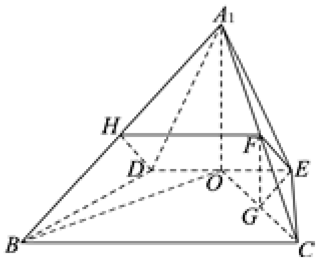
因为平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，且$A_1O\subset$平面A_1DE，

所以 $A_1O\perp$平面$BCED$，所以 $CO\perp A_1O$．

在$\triangle OBC$ 中，$BC=4$，易知 $OB=OC=2\sqrt{2}$，

所以 $CO\perp BO$，所以 $CO\perp$平面 A_1OB，

所以 平面$A_1OB\perp$平面A_1OC． …………8 分



(III)线段OC上不存在点G，使得$OC\perp$平面EFG.
否则，假设线段OC上存在点G，使得$OC\perp$平面EFG，
连接GE，GF，则必有$OC\perp GF$，且$OC\perp GE$.

在$\mathrm{Rt}\triangle A_1OC$中，由$F$为$A_1C$的中点，$OC\perp GF$，得$G$为$OC$的中点.

在$\triangle EOC$中，因为$OC\perp GE$，所以$EO=EC$，

这显然与$EO=1$，$EC=\sqrt{5}$矛盾！

所以线段OC上不存在点G，使得$OC\perp$平面EFG. ………..................12 分