2021 年高三年级统一质量检测

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{y|y=\log_2 x, x>4\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{R}|y=x^{\frac{1}{2}}\right\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$

A．$(-\infty,2]$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$[0,2]$　　D．$(0,2)$

【答案】C

2．若 α、β 表示两个不同的平面，m 为平面 α 内一条直线，则

A．“$m /\!/ \beta$” 是 “$\alpha /\!/ \beta$” 的充分不必要条件

B．“” $m /\!/ \beta$是 “$\alpha /\!/ \beta$” 的必要不充分条件

C．“$m\perp\beta$” 是 “$\alpha\perp\beta$” 的必要不充分条件

D．“$m\perp\beta$” 是 “$\alpha\perp\beta$” 充要条件

【答案】B

3．已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，则该双曲线的离心率为

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．2

【答案】C

4．18 世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数，使复数及其运算具有了几何意义，例如，$|z|=|OZ|$，也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点的距离．在复平面内，复数 $z_0=\dfrac{a+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（$\mathrm{i}$ 是虚数单位，$a\in\mathbf{R}$）是纯虚数，其对应的点为 Z_0，Z 为曲线 $|z|=1$ 上的动点，则 Z_0 与 Z 之间的最小距离为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．2

【答案】B

5．若 $f(x)=\begin{cases}\log_3(x+1), & x\geq 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$，不等式 $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 的解集为

A．$(-1,0)\cup(\sqrt{3}-1,+\infty)$　　B．$(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,0)\cup(0,\sqrt{3}-1)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(\sqrt{3}-1,+\infty)$

【答案】A

6．已知角 θ 终边上有一点 $P\left(\tan\dfrac{4}{3}\pi,2\sin\left(-\dfrac{17}{6}\pi\right)\right)$，则 $\cos\theta$ 的值为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

7．已知 $y=f(x)$ 为奇函数，$y=f(x+1)$ 为偶函数，若当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_2(x+a)$，则 $f(2021)=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】C

$f(x)$ 为奇函数，$f(0)=0$ 且 $f(x)$ 关于原点对称①

$\because x\in[0,1]$ 时 $f(x)=\log_2(x+a)$，$\therefore \log_2(0+a)=0$，$\therefore a=1$．

$\therefore x\in[0,1]$ 时 $f(x)=\log_2(x+1)$．

$\because y=f(x+1)$ 为偶函数关于 y 轴对称．

则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称②

由①②可知 $\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ f(x)=f(2-x) \end{cases}$

$\therefore f(x)=f(2-x)=-f(x-2)$，$\therefore f(x+2)=-f(x)$.

$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=-f(-f(x))=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 周期为 4，$f(2021)=f(1)=\log_2 2=1$，选 C.

8．在抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 第一象限内一点 (a_n,y_n) 处的切线与 x 轴交点横坐标记为 a_{n+1}，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，已知 $a_2=32$，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $m\ge S_n$ 恒成立，则 m 的最小值为

A．16　　B．32　　C．64　　D．128

【答案】D

$y=2x^2$，$y'=4x$，$k=4a_n$，切线：$y-2a_n^2=4a_n(x-a_n)$

令 $y=0$，$x=\frac{a_n}{2}$，$\therefore a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$，$a_2=32$，则 $a_1=64\ne0$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$S_n=\frac{64\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=128-128\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$0<\left(\frac{1}{2}\right)^n\le\frac{1}{2}$，$64\le S_n<128$.

$\therefore m\ge S_n$ 恒成立 $\Leftrightarrow m\ge128$，选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知圆 $C:x^2+y^2-kx+2y+\frac{1}{4}k^2-k+1=0$，下列说法正确的是

A．k 的取值范围是 $k>0$

B．若 $k=4$，过 $M(3,4)$ 的直线与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$，其方程为 $12x-5y-16=0$

C．若$k=4$，圆C与圆$x^2+y^2=1$相交

D．若$k=4$，$m>0,n>0$，直线$mx-ny-1=0$恒过圆C的圆心，则$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\geq 8$恒成立

【答案】ACD

10．已知向量$\vec{a}=\left(2\sin^4\frac{x}{2},\cos^4\frac{x}{2}-f(x)\right)$，$\vec{b}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，则下列说法正确的是

A．将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位得到函数$y=\frac{1}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$的图象

B．函数$f(x)$的最小正周期为π

C．直线$x=\frac{3\pi}{2}$是$f(x)$的一条对称轴

D．函数$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减

【答案】BC

11．若实数$a<b$，则下列不等关系正确的是

A．$\left(\frac{2}{5}\right)^b<\left(\frac{2}{5}\right)^a<\left(\frac{3}{5}\right)^a$

B．若$a>1$，则$\log_a ab>2$

C．若$a>0$，则$\frac{b^2}{1+a}>\frac{a^2}{1+b}$

D．若$m>\frac{5}{3}$，$a,b\in(1,3)$，则$\frac{1}{3}(a^3-b^3)-m(a^2-b^2)+a-b>0$

【答案】BCD

$\because y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$在$\mathbf{R}$上↘，

又$\because a<b$，$\therefore\left(\frac{2}{5}\right)^a>\left(\frac{2}{5}\right)^b$，$y=x^a$，当$a>0$时，$y$在$(0,+\infty)$↗；

当$a<0$时，y在$(0,+\infty)\searrow$；

$\therefore$无法判断$\left(\frac{2}{5}\right)^a$与$\left(\frac{3}{5}\right)^a$大小，A错；

$a>1$时，$1<a<b$，$\therefore \log_a b>\log_a a=1$

$\log_a ab=\log_a a+\log_a b>2$，B对；

$a>0$时，$0<a<b$，$\frac{b^2}{1+a}-\frac{a^2}{1+b}=\frac{b^3+b^2-a^3-b^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{(b^3-a^3)+(b^2-a^2)}{(1+a)(1+b)}>0$

$\therefore \frac{b^2}{1+a}>\frac{a^2}{1+b}$，C对；

令$t=a+b\in(2,6)$，$\frac{a^2+ab+b^2+3}{a+b}=\frac{a^2+a(t-a)+(t-a)^2+3}{t}=\frac{a^2-at+t^2+3}{t}$

$=t+\frac{a^2+3}{t}-a<6+\frac{a^2+3}{6}-a=\frac{1}{6}a^2-a+\frac{13}{2}$

$<\frac{1}{6}\times 9-6+\frac{13}{2}=5$，$\therefore \frac{a^2+ab+b^2+3}{a+b}<3m$，

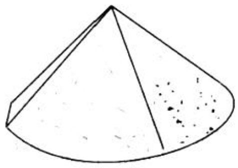
$\therefore a^2+ab+b^2+3<3m(a+b)$，

$(a^2+ab+b^2)(a-b)+3(a-b)>3m(a+b)(a-b)$

$a^3-b^3-3m(a^2-b^2)+3(a-b)>0$，$\frac{1}{3}(a^3-b^3)-m(a^2-b^2)+(a-b)>0$，D对

选BCD.

12．在南方不少地区，经常看到人们头戴一种用木片、竹篾或苇蒿等材料制作的斗笠，用来遮阳或避雨，随着旅游和文化交流活动的开展，斗笠也逐渐成为一种时尚旅游产品.有一种外形为圆锥形的斗笠，称为“灯罩斗笠”，根据人的体型、高矮等制作成大小不一的型号供人选择使用，不同型号的斗笠大小经常用帽坡长（母线长）和帽底宽（底面圆直径长）两个指标进行衡量，现有一个“灯罩斗笠”，帽坡长20厘米，帽底宽$20\sqrt{3}$厘米，关于此斗笠，下面说法正确的是



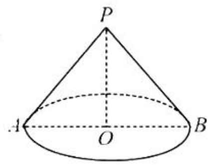
A．斗笠轴截面（过顶点和底面中心的截面图形）的顶角为120°

B．过斗笠顶点和斗笠侧面上任意两母线的截面三角形的最大面积为$100\sqrt{3}$平方厘米

C．若此斗笠顶点和底面圆上所有点都在同一个球上，则该球的表面积为1600π平方厘米

D．此斗笠放在平面上，可以盖住的球（保持斗笠不变形）的最大半径为$20\sqrt{3}-30$厘米

【答案】 ACD

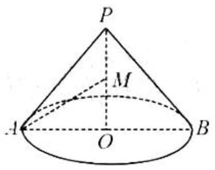


对于A，$PO=\sqrt{400-300}=10$，

$\therefore \sin\angle BPO=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\angle BPO=60^\circ$

$\therefore \angle APB=120^\circ$，故A正确.

对于B，截面三角形面积和$S_{截}=\dfrac{1}{2}PA^2\cdot\sin\theta=200\sin\theta\le 200$，B错；

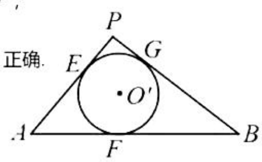


对于C，设外接球球心为M，半径为R，$\therefore MA=MP=R$

在ΔAOM中，由勾股定理$\Rightarrow 300+(10-R)^2=R^2\Rightarrow R=20$，

$\therefore S_{表}=4\pi\cdot 400=1600\pi$，C正确；

对于D，设球心为O'，截面主视图如下图，设内切圆半径为r，



$\therefore \dfrac{1}{2}(20+20+20\sqrt{3})r=\dfrac{1}{2}\cdot 20\sqrt{3}\cdot 10$，$r=20\sqrt{3}-30$，D正确.

选：ACD.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中的常数项是________.（用数字作答）

【答案】 240

14．已知非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，且$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为________.

【答案】 120°

15．某驾驶员培训学校为对比了解“科目二”的培训过程采用大密度集中培训与周末分散培训两种方式的效果，调查了105名学员，统计结果为：接受大密度集中培训的55个学员中有45

名学员一次考试通过，接受周末分散培训的学员一次考试通过的有 30 个.根据统计结果，认为“能否一次考试通过与是否集中培训有关”犯错误的概率不超过________.

附：$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\ge k)$	0.05	0.025	0.010	0.001
k	3.841	5.024	6.635	10.828

【答案】0.025

	集中培训	分散培训	合计
一次考过	45	30	75
一次未考过	10	20	30
合计	55	50	105

$k^2=\dfrac{105(45\times 20-10\times 30)^2}{55\times 50\times 75\times 30}=6.109\in(5.024,6.635)$，

$\therefore$答案：0.025.

16．2021 年是中国传统的“牛”年，可以在平面坐标系中用抛物线与圆勾勒出牛的形象.已知抛物线 $Z:x^2=4y$ 的焦点为 F，圆 $F:x^2+(y-1)^2=4$ 与抛物线 Z 在第一象限的交点为 $P\left(m,\dfrac{m}{4}\right)$，直线 $l:x=t(0<t<m)$ 与抛物线 Z 的交点为 A，直线 l 与圆 F 在第一象限的交点为 B，则 $m=$________；ΔFAB 周长的取值范围为________.（第一空 2 分，第二空 3 分）

【答案】2；(4,6)

方法一：

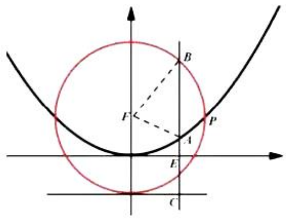
$\begin{cases}x^2=4y\\x^2+(y-1)^2=4\\x>0,y>0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$ $\therefore m=2$

$\begin{cases} x=t \\ x^2=4y \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{t^2}{4} \end{cases}$，$A\left(t,\dfrac{t^2}{4}\right)$

$\begin{cases} x=t \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=t \\ y=1+\sqrt{4-t^2} \end{cases}$，$B(t,1+\sqrt{4-t^2})$

ΔFAB 周长 $=FA+FB+AB=\dfrac{t^2}{4}+1+1+\sqrt{4-t^2}-\dfrac{t^2}{4}+2=\sqrt{4-t^2}+4\in(4,6)$

方法二：



$\begin{cases} x^2=4y \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases}\Rightarrow y^2+2y-3=0\Rightarrow y=1$

$\therefore \dfrac{m^2}{4}=1$，$m=2$

过 A 作 $y=-1$ 的垂线，垂直为 C，

$\therefore AF=AC$，$\therefore \Delta ABF$ 的周长为 $AC+AB+BF=BC+2=3+BE$

$\therefore BE\in(1,3)$，$\therefore$ 周长 $\in(4,6)$

故应填：2，$(4,6)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）从“① $S_n=n\left(n+\dfrac{a_1}{2}\right)$；② $S_2=a_3$，$a_4=a_1a_2$；③ $a_1=2$，a_4 是 a_2、a_8 的等比中项.”三个条件任选一个，补充到下面横线处，并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 d 不等于零，__________，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=S_{2^{n+1}}-S_{2^n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 W_n，求 W_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

选①.

（1）$S_n=n\left(n+\frac{a_1}{2}\right)=n^2+\frac{a_1}{2}n$，令$n=1\Rightarrow a_1=1+\frac{a_1}{2}\Rightarrow a_1=2$

$\therefore S_n=n^2+n$①.当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=(n-1)^2+n-1$②

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，而$a_1=2$，$\therefore a_n=2n$.

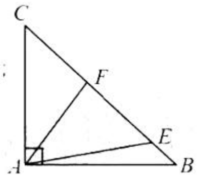
（2）$S_n=n^2+n$，$b_n=(2^{n+1})^2+2^{n+1}-(2^n)^2-2^n=3\cdot 2^{2n}+2^n$

$\therefore W_n=\frac{12\cdot[1-4^n]}{1-4}+\frac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}=4(4^n-1)+2(2^n-1)=4^{n+1}+2^{n+1}-6$

18．（12分）如图，在ΔABC中，$AB\perp AC, AB=AC=2$，点E,F是线段BC（含端点）上的动点，且点E在点F的右下方，在运动的过程中，始终保持$\angle EAF=\frac{\pi}{4}$不变，设$\angle EAB=\theta$弧度.

（1）写出θ的取值范围，并分别求线段AE、AF关于θ的函数关系式；

（2）求ΔEAF面积S的最小值.



（1）$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$，由题意知$\frac{AE}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AB}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow AE=\frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\frac{AF}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\Rightarrow AF=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$.

（2）$S_{\Delta EAF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1}\geq\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2(\sqrt{2}-1)$.

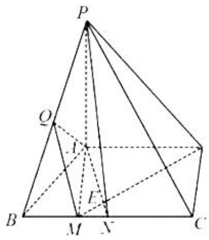
当且仅当$\theta=\frac{\pi}{8}$时，取“=”.

19．（12分）在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\parallel BC$，$BC\perp CD$，

$PA=AD=2$，$CD=1$，$BC=3$，点 M、N 在线段 BC 上，$BM=2MN=1$，$AN\cap MD=E$，Q 为线段 PB 上的一点.

（1）求证：$MD\perp$ 平面 PAN；

（2）若平面 MQA 与平面 PAN 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{4}{5}$，求直线 MQ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



（1）证明：$\because BC=3, BM=1$，$\therefore CM=2, AD=CM$，

又 $\because AD\parallel CM$，$\therefore AD \overset{\parallel}{=} CM$，$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 为平行四边形.

又 $\because BC\perp CD$，$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 为矩形.

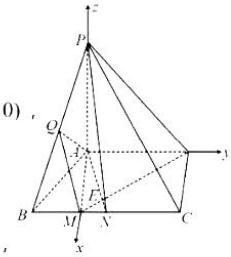
$\because \frac{MN}{AM}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2}$，$\therefore \Delta AMN\backsim\Delta DAM$

$\therefore \angle AED=\angle MAN+\angle AME=\angle ADM+\angle AME=90°$

$\therefore MD\perp AN$，又 $\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp MD$，$AN\cap PA=A$，

$\therefore MD\perp$ 平面 PAN.

（2）如图建立空间直角坐标系



则 $M(1,0,0)$，$A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$N\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$B(1,-1,0)$，$Q(x,y,z)$

设 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BP}\Rightarrow(x-1,y+1,z)=\lambda(-1,1,2)\Rightarrow\begin{cases}x=1-\lambda\\y=\lambda-1\\z=2\lambda\end{cases}$，

$\therefore Q(1-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$

$\overrightarrow{MQ}=(-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$，$\overrightarrow{AM}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AN}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

设平面 MQA 与平面 PAN 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MQ}=0 \\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda x_1+(\lambda-1)y_1+2\lambda z_1=0 \\ x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(0,2\lambda,1-\lambda)$

$\begin{cases} \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AN}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1=0 \\ x_2+\frac{1}{2}y_2=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,-2,0)$

设平面MQA与平面PAN所成锐二面角为θ，

$\therefore \cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\frac{4\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

此时 $\overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，平面$ABCD$的一个法向量$\overrightarrow{n_3}=(0,0,1)$，

$\therefore \sin\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{n_3}||\overrightarrow{MQ}|}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

20．(12 分)某商场每年都会定期答谢会员，允许年度积分超过指定积分的会员参加特价购物赠券活动.今年活动的主题为“购物三选一，真情暖心里”，符合条件的会员可以特价购买礼包A（十斤肉类）、礼包B（十斤蔬菜）和礼包C（十斤鸡蛋）三类特价商品中的任意一类，并且根据购买的礼包不同可以获赠价值不等的代金券.根据以往经验得知，会员购买礼包A和礼包B的概率均为$\frac{2}{5}$.

(1)预计今年有 400 名符合条件的会员参加活动，求商场为此活动需要准备多少斤鸡蛋合理；

(2)在促销活动中，若有甲、乙、丙三位会员同时参与答谢活动，各人购买礼包相互独立，已知购买礼包A或礼包B均可以获得 50 元商场代金券，购买礼包C可以获得 25 元商场代金券，设Y是三人获得代金券金额之和.求Y的分布列和数学期望..

(1)会员购买礼包C的概率为$1-\frac{2}{5}\times2=\frac{1}{5}$，

$\therefore$准备鸡蛋：$400\times\frac{1}{5}\times10=800$（斤）

（2）Y 的所有可能取值为：150，125，100，75

$P(Y=150)=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，$P(Y=125)=C_3^1\cdot\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$

$P(Y=100)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$，$P(Y=75)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

$\therefore Y$ 的分布列如下

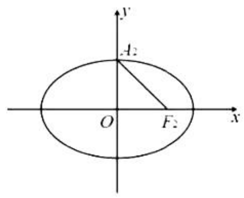
Y	150	125	100	75
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$\therefore E(Y)=150\times\frac{64}{125}+125\times\frac{48}{125}+100\times\frac{12}{125}+75\times\frac{1}{125}=\frac{384}{5}+48+\frac{48}{5}+\frac{3}{5}=135$.

21.（12 分）在平面直角坐标系中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，右焦点为 F_2，上顶点为 A_2，点 $P(a,b)$ 到直线 F_2A_2 的距离等于 1.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

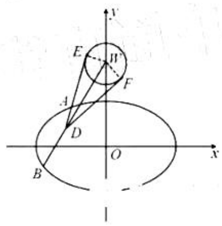
（2）若直线 $l:y=kx+m(m>0)$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，D 为 AB 中点，直线 DE、DF 分别与圆 $W:x^2+(y-3m)^2=m^2$ 相切于点 E、F，求 $\angle EWF$ 的最小值.



（1）直线 F_2A_2 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow bx+cy-bc=0$

$P(a,b)$ 到直线 F_2A_2 的距离为 $\frac{ab+bc-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{ab}{a}=b=1$

而 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=2$，椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.



（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$

$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow x^2+4(kx+m)^2=4$，

$\therefore(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$\Delta = 64k^2m^2 - 4(1+4k^2)(4m^2-4) = 0$，$\therefore x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{-4km}{1+4k^2}$，

$\therefore D\left(\dfrac{-4km}{1+4k^2}, \dfrac{m}{1+4k^2}\right)$，

$$\therefore \sin\angle EDW = \frac{m}{DW} = \frac{m}{\sqrt{\dfrac{16k^2m^2}{(1+4k^2)^2} + \left(\dfrac{m}{1+4k^2} - 3m\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{16k^2}{(1+4k^2)^2} + \left(\dfrac{1}{1+4k^2} - 3\right)^2}}$$

令$\dfrac{1}{1+4k^2} = t$，$\therefore \sin\angle EDW = \dfrac{1}{\sqrt{4t-4t^2+(t-3)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{-3t^2-2t+9}} \le \dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle EDW \le 30^\circ$，$\therefore \angle EWF \ge 120^\circ$.

22.（12分）青岛胶东国际机场的显著特点之一是弯曲曲线的运用，衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率.曲线的曲率定义如下：若$f'(x)$是$f(x)$的导函数，$f''(x)$是$f'(x)$的导函数，则曲线$y=f(x)$在点$(x, f(x))$处的曲率$K = \dfrac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}$.

已知函数$f(x) = ae^x - \ln x - b\cos(x-1)(a \ge 0, b > 0)$，若$a=0$，则曲线$y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的曲率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求b；

（2）若函数$f(x)$存在零点，求a的取值范围；

（3）已知$1.098 < \ln 3 < 1.099$，$e^{0.048} < 1.050$，$e^{-0.045} < 0.956$，证明：$1.14 < \ln\pi < 1.15$.

（1）$a=0$时，$f(x) = -\ln x - b\cos(x-1)$，$f(1) = -b$，

$f'(x) = -\dfrac{1}{x} + b\sin(x-1)$，$f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + b\cos(x+1)$

$\therefore f(x)$在$(1,-b)$处的曲率为$k = \dfrac{|1+b|}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 1$.

（2）$f(x) = ae^x - \ln x - \cos(x-1) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\ln x + \cos(x-1)}{e^x}$

令$g(x)=\dfrac{\ln x+\cos(x-1)}{e^x}$，$\therefore g(x)\le\dfrac{\ln x+1}{e^x}\le\dfrac{x}{e^x}\le\dfrac{1}{e}$，

当且仅当$x=1$时取“=”，显然，当$a>\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$无零点.

当$0\le a\le\dfrac{1}{e}$时，$g(1)=\dfrac{1}{e}\ge a$，$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{-1+\cos\left(\dfrac{1}{e}-1\right)}{e^{\frac{1}{e}}}<0\le a$

$\therefore$存在$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$使$g(x_0)=a$，符合题意.

综上：实数a的取值范围为$\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$.

（3）由（2）知$\dfrac{\ln x+1}{e^x}\le\dfrac{1}{e}$，$\therefore\ln x+1\le e^{x-1}$（当且仅当$x=1$时取“=”）

$\therefore\ln\dfrac{\pi}{3}+1<e^{\frac{\pi}{3}-1}<e^{0.048}$，$\therefore\ln\pi<e^{0.048}-1+\ln3<1.050-1+1.099<1.15$

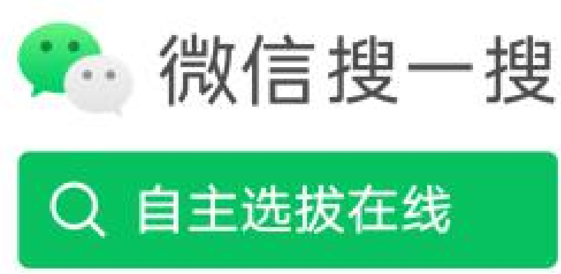
又$\because\ln\dfrac{3}{\pi}+1<e^{\frac{3}{\pi}-1}<e^{-0.045}$，$\therefore\ln\pi>\ln3+1-e^{-0.045}>1.098+1-0.956>1.14$

综上：$1.14<\ln\pi<1.15$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》