2020 年全国高三统一联合考试·文科数学

一、选择题

1.B 【解析】$B=\{x|-2<x<1\}$,所以 $A\cap B=\{-1,0\}$.选 B.

2.A 【解析】$\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i(1+i)}{2}=-1+i$,所以虚部为 1.选 A.

3.C 【解析】该楔体的侧视图是等腰三角形,底长为 3 丈,高为 2 丈,所以腰长为$\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$(丈).所以侧视图的周长为 $3+2\times\frac{5}{2}=8$(丈).选 C.

4.A 【解析】由 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$,得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\tan\alpha=-2$.选 A.

5.C 【解析】5 选 2 共有 10 种结果.历史与地理至少选一科有两种情况:第一种情况为选一科的,结果有 6 种;第二种情况为两科都选的,结果有 1 种.因此,所求概率 $P=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$.选 C.

6.A 【解析】因为 $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以 $f(x)$的最大值为 1.选 A.

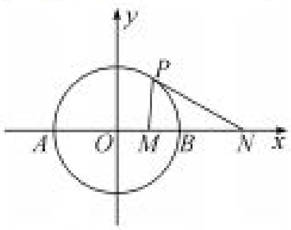
7.B 【解析】设 $P(x,y)$为所求函数图像上的任意一点,它关于直线 $y=1$ 对称的点是 $Q(x,2-y)$.由题意知点 $Q(x,2-y)$在函数 $y=\log_2 x$ 的图像上,则 $2-y=\log_2 x$,即 $y=2-\log_2 x=\log_2\frac{4}{x}$.选 B.

8.C 【解析】易知函数为奇函数,排除选项 A,B;当 $x\in(0,1)$时,$y<0$,排除选项 D.选 C.

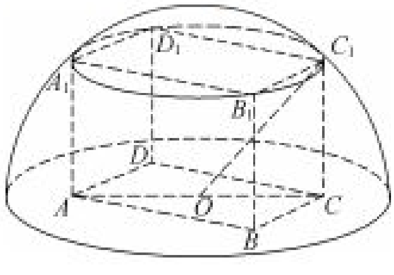
9.D 【解析】由抛物线的性质知以焦点弦为直径的圆与准线相切,所以弦 AB 为所求圆的直径.又 $l_{AB}:y=x-1$,与抛物线 $y^2=4x$ 联立消去 y,得 $x^2-6x+1=0$.设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,圆心坐标为(a,b),则 $\begin{cases}x_1+x_2=2a=6,\\b=a-1,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=3,\\b=2.\end{cases}$所以圆的半径为 $a+1=4$,即所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$.选 D.

10.D 【解析】在△ABC 中,由正弦定理及 $c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,得 $\sin C\sin A\cos B+\sin A\cdot\sin B\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$.因为在△$ABC$ 中 $\sin A\neq 0$,所以 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$A=\frac{\pi}{3}$或$A=\frac{2\pi}{3}$.若 $A=\frac{2\pi}{3}$,则 $a>b$,$a>c$,所以 $2a>b+c$,与已知 $a=1$,$b+c=2$ 矛盾,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.所以由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc=4-3bc=1$,解得 $bc=1$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.选 D.

11.B 【解析】如图,由题意圆上的任意一点 P 均满足 $|PM|=\lambda|PN|$,可知 A,B 两点也满足该关系式.由 $A(-4,0)$,$B(4,0)$,$M(2,0)$,$N(t,0)$,得 $\lambda=\frac{|AM|}{|AN|}=\frac{|BM|}{|BN|}=\frac{6}{4+t}=\frac{2}{t-4}$,解得 $t=8$,$\lambda=\frac{1}{2}$.选 B.



12.A 【解析】如图,设 $AB=BC=a$,$CC_1=h$,由长方体内接于半球,得$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+h^2=9$,则 $h^2=9-\frac{a^2}{2}$.令 $t=\frac{a^2}{2}$,则 $a^2=2t(0<t<9)$,所以 $V^2=(a^2h)^2=a^4h^2=4t^2(9-t)=-4t^3+36t^2$.令 $f(t)=-4t^3+36t^2(0<t<9)$,则 $f'(t)=-12t^2+72t=-12t(t-6)$,所以当 $t\in(0,6)$时,$f'(t)>0$,$f(t)$单调递增;当 $t\in(6,9)$时,$f'(t)<0$,$f(t)$单调递减.所以当 $t=6$ 时,$f(t)$最大,即长方体的体积 V 最大,此时 $a=2\sqrt{3}$,$V=12\sqrt{3}$.选 A.

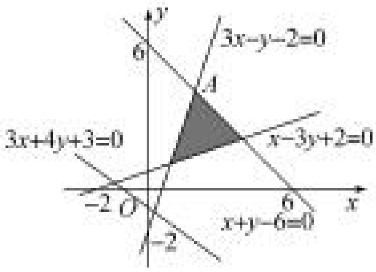


二、填空题

13.$\frac{5}{4}$ 【解析】因为 $a\perp(a+kb)$，所以 $a\cdot(a+kb)=a^2+ka\cdot b=0$. 又 $a=(-2,1)$，$b=(3,2)$，所以 $5+k(-6+2)=0$，解得 $k=\frac{5}{4}$.

14.分层抽样 【解析】不同年龄段的人对移动支付的熟知程度不同，因此应该按照年龄进行分层抽样.

15.5 【解析】所求目标函数的值可转化为可行域(包括边界)上的点到直线 $l:3x+4y+3=0$ 的距离，显然点 $A(2,4)$ 到直线 $l:3x+4y+3=0$ 的距离最大，且最大值为 $\frac{|3\times 2+4\times 4+3|}{5}=5$.



16.$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$ 【解析】$f(x)=x-\frac{1}{x}$ 为奇函数，且在区间 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内均为增函数，

因为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(2)$，

所以 $ax-1>2$ 或 $-\frac{1}{2}<ax-1<0$ 在 $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 上恒成立，即 $a>\frac{3}{x}$ 或 $\frac{1}{2x}<a<\frac{1}{x}$ 在 $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 上恒成立，所以 $a>3$ 或 $\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$.

即实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$.

三、解答题

17.解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}2a_1+3d=0,\\(a_1+d)(a_1+2d)=-1,\\d>0.\end{cases}$ ………………………… 2分

解得 $a_1=-3$，$d=2$. ………………………………………… 4分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-5(n\in\mathbf{N}^*)$.

……………………………………………………………… 5分

(2)$b_n=3^{a_n+4}=3^{2n-1}=3\times 3^{2(n-1)}$，所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=3$ 为首项，$q=9$ 为公比的等比数列.

所以 $T_n=\frac{3(1-9^n)}{1-9}=\frac{3}{8}(9^n-1)$. ……………… 8分

故 $\lambda T_n-b_{n+1}=\frac{3\lambda}{8}(9^n-1)-3\times 3^{2n}$

$=3\left(\frac{\lambda}{8}-1\right)9^n-\frac{3\lambda}{8}$. …………… 10分

所以当 $\frac{\lambda}{8}-1=0$，即 $\lambda=8$ 时，λT_n-b_{n+1} 恒为定值 -3.

……………………………………………………………… 12分

18.解：(1)因为 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$，

$\bar{y}=\frac{55+69+71+85}{4}=70$， ………………………… 2分

$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=1\times 55+2\times 69+3\times 71+4\times 85=746$，

$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=1+4+9+16=30$， ………………………… 4分

所以 $\hat{b}=\frac{746-4\times 70\times 2.5}{30-4\times 2.5^2}=9.2$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=70-9.2\times 2.5=47$. ………………… 7分

因此，所求线性回归方程为 $\hat{y}=9.2x+47$. ……… 8分

(2)根据(1)中求得的线性回归方程可估算出

2019 年脱贫户数：$\hat{y}_1=9.2\times 5+47=93$，

2020 年脱贫户数：$\hat{y}_2=9.2\times 6+47\approx 102$. ……… 10分

因为 2015—2018 年实际脱贫 280 户，2019 年和 2020 年估计共脱贫 195 户，

所以 $280+195=475>473$，即到 2020 年底该乡镇的 473 户贫困户估计能够全部脱贫. ……………… 12分

19.(1)证明：在 $\triangle PAB$ 中，由 $PA=AB=1$，$\angle PAB=120°$，得 $PB=\sqrt{3}$.

因为 $PC=2$，$BC=1$，$PB=\sqrt{3}$，所以 $PB^2+BC^2=PC^2$，即 $BC\perp PB$. ………………………………… 2分

因为 $\angle ABC=90°$，所以 $BC\perp AB$. 因为 $PB\cap AB=B$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB. ………………………………… 4分

又 $BC\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.

……………………………………………………………… 6分

(2)解：在平面 PAB 内，过点 P 作 $PE\perp AB$，交 BA 的延长线于点 E. 如图，由(1)知 $BC\perp$ 平面 PAB，

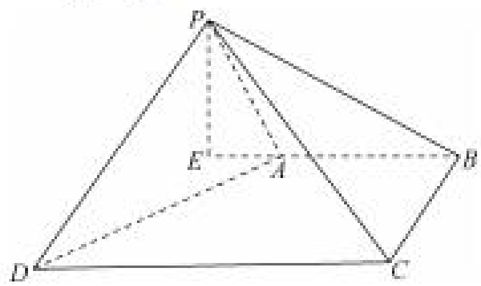
因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $PE\subset$ 平面 PAB，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PE\perp AB$，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. ………………… 9分

因为在 $\mathrm{Rt}\triangle PEA$ 中，$PA=1$，$\angle PAE=60°$，

所以 $PE=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………… 10分

因为底面 $ABCD$ 是直角梯形，所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. …………………………… 12分



20.解：(1)设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$S_{\triangle F_1AB}=\frac{1}{2}\times 2c\times|AB|=c\cdot\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$，而 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………… 2分

则 $b^2=1,a^2=2$， …………………………………… 4分

因此椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………… 5分

(2)假设存在直线 l 满足条件，设直线 $l:y=kx+m$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，线段 CD 的中点 $M(x_0,y_0)$.

将直线 l 的方程代入椭圆方程得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，则 $2x_0=x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，所以 $x_0=-\frac{2km}{1+2k^2}$，又 $y_0=kx_0+m$，所以 $y_0=\frac{m}{1+2k^2}$，即 $M\left(-\frac{2km}{1+2k^2},\frac{m}{1+2k^2}\right)$. ……………… 7分

若 CD 的垂直平分线过右焦点 $F_2(1,0)$，则 $k\cdot\frac{\frac{m}{1+2k^2}}{-\frac{2km}{1+2k^2}-1}=-1$，所以 $1+2k^2=-km$，……… 9分

即 $x_0=-\frac{2km}{1+2k^2}=2$，与 $x_0\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 矛盾.

故不存在这样的直线 l 满足条件. ……………… 12分

21.(1)解：由 $f(x)=x\ln x$，得 $f'(x)=\ln x+1$， … 1分

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，……………………… 3分

故所求切线方程为 $y-0=1\times(x-1)$，即 $x-y-1=0$.

…………………………………………………… 4分

(2)证明：由 $f(x)>ax(x-1)$，得 $x\ln x>ax(x-1)$，考虑到 $x>0$，可得 $\ln x>a(x-1)$.

设 $g(x)=\ln x-a(x-1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a=-\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内是增函数，在区间 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 内是减函数. ……………… 6分

一方面，由 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 内是减函数及 $g(1)=0$，得当 $x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$ 时，$g(x)>0$. ① ……… 8分

另一方面，$g(e^{-a})=\ln e^{-a}-a(e^{-a}-1)=-ae^{-a}<0$，则存在 $x_0\in\left(e^{-a},\frac{1}{a}\right)$，即 $x_0\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，使得 $g(x_0)=0$.

…………………………………………………… 10分

又 $g(x)$ 在区间 $\left(x_0,\frac{1}{a}\right)$ 内是增函数，

所以当 $x\in\left(x_0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g(x)>0$. ②

由①②，存在 $c\in\left(x_0,\frac{1}{a}\right)$，使 $g(x)>0$ 恒成立，

即存在 $c\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，使得对任意的 $x\in(c,1)$，恒有 $f(x)>ax(x-1)$. ……………………………… 12分

22.解：(1)由 $\rho=2\sin\theta$ 得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，即 $x^2+y^2-2y=0$，即得 $x^2+(y-1)^2=1$.

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$.

…………………………………………………… 4分

(2)因为过极点 O 与点 M 的直线方程为 $\theta=\beta$，

又极点 O 既在直线 OM 上又在曲线 C 上，

所以直线与曲线 C 相交所得弦长为 $\sqrt{3}$ 时即得 $\rho=\sqrt{3}$，

所以在 $\rho=2\sin\beta$ 中，令 $\rho=\sqrt{3}$ 得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$，或 $\beta=\frac{2\pi}{3}$. ……………………… 7分

当 $\beta=\frac{\pi}{3}$ 时，因为曲线 C 的圆心的极坐标为 $C\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\angle MCO=\frac{2\pi}{3}$，所以曲线 C 被分成的两段弧长之比为 2∶1 或 1∶2； ……………………… 9分

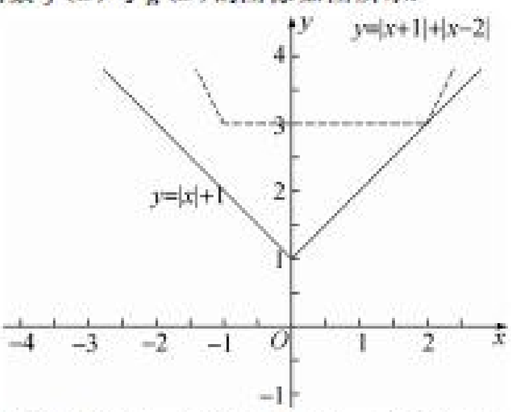
同理，当 $\beta=\frac{2\pi}{3}$ 时，由对称性可得曲线 C 被分成的两段弧长之比也为 2∶1 或 1∶2.

因此，直线 OM 将曲线 C 分成的两段弧长之比为 2∶1 或 1∶2. ……………………………… 10分

23.解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1,x<-1,\\3,-1\leqslant x\leqslant 2,\\2x-1,x>2.\end{cases}$ ……………… 2分

$g(x)=|x|+1=\begin{cases}x+1,x\geqslant 0,\\-x+1,x<0.\end{cases}$ ……………… 3分

作出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像如图所示.



从图中可知 $f(x)>g(x)$ 的解集为 $\{x|x\in\mathbf{R}，且 x\neq 2\}$.

…………………………………………………… 5分

(2)因为对任意的 $x_1\in\mathbf{R}$，都有 $x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，

所以 $\{y|y=f(x)\}\subseteq\{y|y=g(x)\}$. ……………… 6分

又因为 $f(x)=|x+a|+|x-2a|\geqslant|x+a-(x-2a)|=3|a|$，$g(x)=|x|+1\geqslant 1$，……………… 8分

所以 $3|a|\geqslant 1$，即得 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 或 $a\leqslant-\frac{1}{3}$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

…………………………………………………… 10分