

北京市海淀区 2018 年高三上学期期中考试

理科数学试题及参考答案

海淀区高三年级第一学期期中练习

数 学 (理 科)

2018.11

本试卷共4页, 150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题纸一并交回。

一、选择题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- 已知集合 $A = \{x | x - a \leq 0\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围为
(A) $(-\infty, 1]$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $(-\infty, 3]$ (D) $[3, +\infty)$
- 下列函数中, 是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是
(A) $f(x) = x^2 - |x|$ (B) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (C) $f(x) = |\ln x|$ (D) $f(x) = e^{|x|}$
- $\int_1^e \frac{1}{x} dx =$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) e
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $\frac{a_6}{a_5} = 2$, 则公差 d 的值是
(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$
- 角 θ 终边经过点 $P(4, y)$, 且 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan \theta =$
(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + \frac{a}{n}$, 则 “ $a_2 > a_1$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 单调递增” 的
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 且 $a^2 > b^2 > c^2$, 则 $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot a$ 中最小的值是
(A) $a \cdot b$ (B) $b \cdot c$ (C) $c \cdot a$ (D) 不能确定的
- 函数 $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x + 3$. 若存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \frac{9}{2}]$, 使得 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + g(x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1}) + f(x_n)$, 则 n 的最大值为
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 计算 $\lg 4 + \lg 25 =$ _____.

10. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$, 则向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 夹角的大小为 _____.

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 下表给出了 S_n 的部分数据:

n	1	2	3	4	...
S_n	t	10	19	$\frac{65}{2}$	...

则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q =$ _____, 首项 $a_1 =$ _____.

12. 函数 $f(x) = |\sin \frac{x}{2} - a|$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值为 2, 则 $a =$ _____.

13. 能说明“若 $f(x) > g(x)$ 对任意的 $x \in [0, 2]$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值大于 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值”为假命题的一对函数可以是 $f(x) =$ _____, $g(x) =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq a, \\ \frac{e}{x}, & x > a. \end{cases}$

(I) 若函数 $f(x)$ 的最大值为 1, 则 $a =$ _____;

(II) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{a}{e}$ 只有一个公共点, 则 a 的取值范围为 _____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分)

设 $\{a_n\}$ 是等比数列, S_n 为其前 n 项的和, 且 $a_2 = 2$, $a_1 + S_2 = 0$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $S_n \geq 80$, 求 n 的最小值.

16. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$.

(I) 求 $f(0)$ 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间.

17. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 1$.

(I) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求证: 直线 $y = ax - \frac{23}{27}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线;

(III) 写出 a 的一个值, 使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点 (只需直接写出数值).

18. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 7$, $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

(I) 若 $\cos B = \frac{5}{7}$, 求 b 的值;

(II) 若 $a + b = 11$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = mx^2 - x - \frac{\ln x}{m}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 求证: 存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < 1$.

20. (本小题满分 14 分)

记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n , 最小值为 m_n , 令 $b_n = \frac{M_n + m_n}{2}$.

(I) 若 $a_n = 2^n - 3n$, 请写出 b_1, b_2, b_3, b_4 的值;

(II) 求证: “数列 $\{a_n\}$ 是等差数列” 是 “数列 $\{b_n\}$ 是等差数列” 的充要条件;

(III) 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| < 2018, |b_n| = 1$, 求证: 存在 $K \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\forall n \geq K$, 有 $b_{n+1} = b_n$.

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数 学 (理科)

2018.11

说明: 这份只是参考答案, 不是评分标准, 评分标准等试卷讲评之后下发。

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

1. B 2. D 3. C 4. A 5. C 6. C 7. A 8. D

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 2 10. $\frac{\pi}{4}$ 11. $\frac{3}{2}, 4$ 12. -1 或 2

13. $f(x) = x, g(x) = x - 1$ 14. e, (0, e]

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分.

15. 解: (I) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q

$$\text{因为 } a_1 + S_2 = a_1 + a_1 + a_2 = 2a_1 + a_2 = 0$$

$$\text{又 } a_2 = 2, \text{ 所以 } a_1 = -1$$

$$\text{所以 } q = \frac{a_2}{a_1} = -2$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 q^{n-1} = -1(-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1}$$

$$(II) \text{ 因为 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{-1(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = \frac{(-2)^n - 1}{3}$$

$$\text{所以 } S_n \geq 80, \text{ 即 } \frac{(-2)^n - 1}{3} \geq 80, \text{ 即 } (-2)^n \geq 241$$

显然 n 为奇数时, 不等式不成立,

当 n 为偶数时, 即 $2^n \geq 241$, 解得 $n \geq 8$

所以 n 的最小值为 8 .

16.解: (I) $f(0) = 2\sin 0 + \frac{\cos 0}{\sin 0 + \cos 0} = 1$

(II) 因为 $\sin x + \cos x \neq 0$, 所以 $x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$,

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} \\ &= 2\sin x + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \\ &= 2\sin x + \cos x - \sin x \\ &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{解得 } 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{令 } k = 0, \text{ 得到 } -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\text{因为 } x \neq k\pi - \frac{\pi}{4},$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增区间为 $(0, \frac{\pi}{4})$

17. 解: (I) 函数 $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

当 $a = -1$ 时, $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

所以 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (\frac{1}{3}, +\infty)$,

单调递减区间为 $(-1, \frac{1}{3})$

(II) 法一:

因为 $f'(x) = 3x^2 + 2x + a$

令 $f'(x) = 3x^2 + 2x + a = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}$

因为 $f(0) = -1$, 直线 $y = ax - \frac{23}{27}$ 不经过 $(0, -1)$

而 $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}a - \frac{23}{27}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-\frac{2}{3}, f(-\frac{2}{3}))$ 处的切线为 $y - (-\frac{2}{3}a - \frac{23}{27}) = a(x - (-\frac{2}{3}))$

化简得到 $y = ax - \frac{23}{27}$

所以无论 a 为何值, 直线 $y = ax - \frac{23}{27}$ 都是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-\frac{2}{3}, f(-\frac{2}{3}))$ 处的切线

(III) 取 a 的值为 -2 .

这里 a 的值不唯一, 只要取 a 的值小于 -1 即可.

18. 解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\cos B = \frac{5}{7}$, 且 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

根据正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

代入 $c = 7, \sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 解得 $b = 5$.

(II) 法一: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 所以 $\cos C = \pm \frac{1}{5}$

当 $\cos C = \frac{1}{5}$ 时, 根据余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

且 $a + b = 11, c = 7$,

得到 $49 = 121 - 2ab - \frac{2ab}{5}$, 所以 $ab = 30$

所以 $\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases}$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{6}$

当 $\cos C = -\frac{1}{5}$ 时, 根据余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

又 $a + b = 11, c = 7$, 得到 $ab = 45$

此时方程组 $\begin{cases} a+b=11 \\ ab=45 \end{cases}$ 无解

综上, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{6}$.

法二: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{121}{2} > c^2$

根据余弦定理 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 得到 $\cos C > 0$

因为 $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 所以 $\cos C = \frac{1}{5}$

根据余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 和 $a + b = 11, c = 7$,

得到 $ab = 30$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{6}$

19. 解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 且 $m \neq 0$.

$$f'(x) = 2mx - 1 - \frac{1}{mx} = \frac{2m^2x^2 - mx - 1}{mx} = \frac{(2mx+1)(mx-1)}{mx}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得到 } x_1 = -\frac{1}{2m}, x_2 = \frac{1}{m}$$

当 $m > 0$ 时, $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{1}{m})$	$\frac{1}{m}$	$(\frac{1}{m}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{m}$ 处取得极小值 $f(\frac{1}{m}) = \frac{\ln m}{m}$

当 $m < 0$ 时, 当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, -\frac{1}{2m})$	$-\frac{1}{2m}$	$(-\frac{1}{2m}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2m}$ 处取得极大值 $f(-\frac{1}{2m}) = \frac{3}{4m} + \frac{\ln(-2m)}{m}$

(II) 当 $m < 0$ 时, $f(1) = m - 1 < 0 < 1$, 结论成立

当 $m > 0$ 时, 由 (I) 知道, 由 (I) 可知, $f(x)$ 的最小值是 $f(\frac{1}{m}) = \frac{\ln m}{m}$,

“存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < 1$ ” 等价于 “ $f(\frac{1}{m}) < 1$ ”

$$\text{而 } f(\frac{1}{m}) - 1 = \frac{\ln m - m}{m}$$

$$\text{设 } g(x) = \ln x - x, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 当 $1 < x$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1) = -1 < 0$, 所以 $f(\frac{1}{m}) - 1 = \frac{\ln m - m}{m} < 0$, 结论成立.

20. 解: (I) 因为 $a_n = 2^n - 3n$, 所以 $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = 4$

$$\text{所以 } b_1 = -1, \quad b_2 = -\frac{3}{2}, \quad b_3 = -\frac{3}{2}, \quad b_4 = 1$$

(II) (必要性) 当数列 $\{a_n\}$ 是等差数列时, 设其公差为 d

当 $d > 0$ 时, $a_n - a_{n-1} = d > 0$, 所以 $a_n > a_{n-1}$, 所以 $M_n = a_n$, $m_n = a_1$,

当 $d < 0$ 时, $a_n - a_{n-1} = d < 0$, 所以 $a_n < a_{n-1}$, 所以 $M_n = a_1$, $m_n = a_n$,

当 $d = 0$ 时, $a_n - a_{n-1} = d = 0$, 所以 $a_n = a_{n-1}$, 所以 $M_n = a_1$, $m_n = a_n$

$$\text{综上, 总有 } b_n = \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$\text{所以 } b_n - b_{n-1} = \frac{a_n + a_1}{2} - \frac{a_{n-1} + a_1}{2} = \frac{d}{2}, \text{ 所以数列 } \{b_n\} \text{ 是等差数列}$$

(充分性) 当数列 $\{b_n\}$ 是等差数列时, 设其公差为 d^*

$$\text{因为 } b_n - b_{n-1} = \frac{M_n + m_n}{2} - \frac{M_{n-1} + m_{n-1}}{2} = \frac{M_n - M_{n-1}}{2} + \frac{m_n - m_{n-1}}{2} = d^*,$$

根据 M_n , m_n 的定义, 有以下结论:

$M_n \geq M_{n-1}$, $m_n \leq m_{n-1}$, 且两个不等式中至少有一个取等号

当 $d^* > 0$ 时, 则必有 $M_n > M_{n-1}$, 所以 $a_n = M_n > M_{n-1} \geq a_{n-1}$,

所以 $\{a_n\}$ 是一个单调递增数列, 所以 $M_n = a_n$, $m_n = a_1$,

$$\text{所以 } b_n - b_{n-1} = \frac{a_n + a_1}{2} - \frac{a_{n-1} + a_1}{2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{2} = d^*$$

所以 $a_n - a_{n-1} = 2d^*$, 即 $\{a_n\}$ 为等差数列

当 $d^* < 0$ 时, 则必有 $m_n < m_{n-1}$, 所以 $a_n = m_n < m_{n-1} \leq a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 是一个单调递减数列, 所以 $M_n = a_1$, $m_n = a_n$,

$$\text{所以 } b_n - b_{n-1} = \frac{a_1 + a_n}{2} - \frac{a_1 + a_{n-1}}{2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{2} = d^*$$

所以 $a_n - a_{n-1} = 2d^*$, 即 $\{a_n\}$ 为等差数列

$$\text{当 } d^* = 0 \text{ 时, } b_n - b_{n-1} = \frac{M_n + m_n}{2} - \frac{M_{n-1} + m_{n-1}}{2} = \frac{M_n - M_{n-1}}{2} + \frac{m_n - m_{n-1}}{2} = 0$$

因为 $M_n - M_{n-1}$, $m_n - m_{n-1}$ 中必有一个为 0,

根据上式，一个为 0，则另一个亦为 0，

所以 $M_n = M_{n-1}, m_n = m_{n-1}$ ，所以 $\{a_n\}$ 为常数数列，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列

综上，结论得证.

(III) 假设结论不成立.

因为 $|b_n| = 1$ ，即 $b_n = 1$ 或者 $b_n = -1$ ，

所以对任意 $K \in \mathbf{N}^*$ ，一定存在 $i \geq K$ ，使得 b_i, b_{i+1} 符号相反

所以在数列 $\{b_n\}$ 中存在 $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \dots, b_{k_i}, b_{k_{i+1}}, \dots$ ，其中 $k_1 < k_2 < k_3 \dots < k_i < \dots$

且 $-1 = b_{k_1} = b_{k_2} = b_{k_3} = \dots = b_{k_i} = b_{k_{i+1}}, \dots$ ，

$$1 = b_{k_1+1} = b_{k_2+1} = b_{k_3+1} = \dots = b_{k_i+1} = b_{k_{i+1}+1} \dots$$

因为 $b_{k_i} = -1, b_{k_i+1} = 1$ ，即 $\frac{M_{k_i} + m_{k_i}}{2} = -1, \frac{M_{k_i+1} + m_{k_i+1}}{2} = 1$

注意到 $M_{k_i+1} \geq M_{k_i}$ ， $m_{k_i+1} \leq m_{k_i}$ ，且有且仅有一个等号成立，

所以必有 $M_{k_i+1} > M_{k_i}$ ， $m_{k_i+1} = m_{k_i}$

所以 $M_{k_i+1} = M_{k_i} + 4$ ，所以 $a_{k_i+1} = M_{k_i+1} = M_{k_i} + 4$

因为 $k_i > k_{i-1}$ ，所以 $k_i \geq k_{i-1} + 1$ ，所以 $M_{k_i} \geq M_{k_{i-1}+1}$

所以 $a_{k_i+1} = M_{k_i} + 4 \geq M_{k_{i-1}+1} + 4$

所以 $a_{k_i+1} \geq a_{k_{i-1}+1} + 4$

所以 $a_{k_i+1} - a_{k_{i-1}+1} \geq 4$

所以 $a_{k_2+1} - a_{k_1+1} \geq 4$

$$a_{k_3+1} - a_{k_2+1} \geq 4$$

$$a_{k_4+1} - a_{k_3+1} \geq 4$$

.....

$$a_{k_m+1} - a_{k_{m-1}+1} \geq 4$$

所以 $a_{k_m+1} - a_{k_1+1} \geq 4(m-1)$

所以 $a_{k_m+1} \geq a_{k_1+1} + 4(m-1)$

所以 $a_{k_{1010}+1} \geq a_{k_1+1} + 4(1010-1) > -2018 + 4036 = 2018$,

这与 $|a_n| < 2018$ 矛盾, 所以假设错误,

所以存在 $K \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\forall n \geq K$, 有 $b_{n+1} = b_n$.

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫, 快速关注