湖南省2023届高三九校联盟第二次联考

数学参考答案

命题学校:长沙市一中　审题学校:常德市一中

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

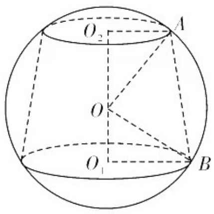
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	D	A	C	D	B

1. B 【解析】$A=(0,2)$,要使 $A\subsetneqq B$,$a\leqslant 0$,选B.

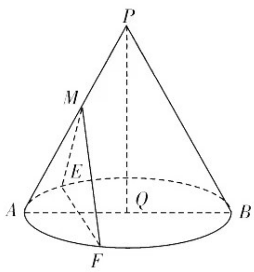
2. C 【解析】解得方程 $x^2+4x+5=0$ 的两根为 $-2\pm i$,故 $|x_1-x_2|=2$,选C.

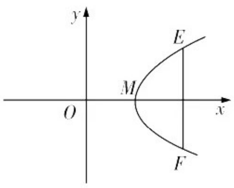
3. B 【解析】对于A,由题知 $f(x)\leqslant 0$,若 $x\in(0,2\pi)$,当且仅当 $x=\pi$ 时,$f(x)=0$,A错;对于B,由复合函数单调性知,当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,B正确;对于C,由 $\log_2|\cos x|$ 有意义,则 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,
$\therefore\left\{x\in\mathbf{R}\left|x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ 是 $\left\{x\in\mathbf{R}\left|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ 的充分不必要条件,C错;对于D,$\left\{x\in\mathbf{R}\left|-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right.\right\}$ 是 $f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$ 成立的充分不必要条件.

4. D 【解析】该球的表面积 $S=4\pi r^2=100\pi$,所以球的半径 $r=5$,设圆台的上、下底面圆心分别为 O_2,O_1,在上、下底面圆周上分别取点 A,B,
连接 $OO_2,OO_1,OA,OB,O_2A,O_1B$,如图,
则 $|OO_1|=3,|OO_2|=4$,所以 $|O_1O_2|=7$,
由圆台体积公式知,$V=\frac{1}{3}(9\pi+16\pi+12\pi)\cdot 7=\frac{259\pi}{3}$,故选D.



5. A 【解析】如图,设平面 $\alpha/\!/PQ$,平面 α 与圆锥侧面的交线为 C,过 P 垂直于 EF 的母线与曲线 C 交于 M,不妨延长 PM 至 A,使 $PM=MA$.





过 A 垂直于 PQ 的截面交曲线 C 为 E,F,
设 P 在平面 α 内的投影为点 O,以 O 为原点,PQ 投影为 x 轴建立平面直角坐标系,易知点 M 为双曲线顶点.
设 $OM=a$,则可求 E 点坐标为 $(2a,a)$,代入方程:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,知 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$,故双曲线离心率为 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,选A.

6. C 【解析】对于A,总体方差与样本容量有关,A错;对于B,相关性越强,$|r|$ 越接近于1;对于C,若 $P(X\geqslant-1)+P(X\geqslant 5)=1$,则 $P(X\geqslant-1)=P(X<5)$,$\therefore\mu=\frac{5+(-1)}{2}=2$,正确;对于D,甲组:第30百分位数为30,第50百分位数为 $\frac{37+m}{2}$,乙组:第30百分位数为 n,第50百分位数为 $\frac{33+44}{2}=\frac{77}{2}$,解得 $n=30,m=40$,故 $m+n=70$.

7. D 【解析】由已知有 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3}$,$|\overrightarrow{OB}|=3$,$|\overrightarrow{OC}|=2$,$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$,又四边形 $ABCD$ 为平行四边形,
所以 $|\overrightarrow{OD}|^2=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA})^2=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2$
$=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=4+3+9-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}-2\times\sqrt{3}\times3\times\cos\frac{\pi}{6}=1$，

因此$|\overrightarrow{OD}|=1$，故选 D.

8. B 【解析】$f(x)=(x-a-b)(x-b)(\ln x-a)$，则 $f(x)=0$ 的三解为 $x_1=e^a$，$x_2=b$，$x_3=a+b$，其中 e^a 为正数，要使对任意 $x>0$ 均有$(x-a-b)(x-b)(\ln x-a)\geqslant0$，只能是 $e^a=a+b$ 且 $b<0$，或 $e^a=b$，$a+b\leqslant0$.

若 $e^a=a+b$，且 $b<0$，由 $e^a\geqslant a+1>a+b$ 知，$e^a=a+b$ 无解；

则 $e^a=b$，$a+b\leqslant0$，又 $e^a=b>0$，$a+b\leqslant0$ 知，$a<0$. 选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	AD	ABD	BCD

9. BC 【解析】由 $f(x+2)+f(x)=0$ 得 $f(x+4)+f(x+2)=0$，

所以 $f(x+4)=f(x)$，即函数 $f(x)$的一个周期为 4，A 项错误；

由 $y=f(2-x)$是偶函数得 $f(2-x)=f(2+x)$，

所以函数 $f(x)$关于 $x=2$ 对称，

由 $f(x+2)+f(x)=0$ 得 $f(2-x)+f(x)=0$，

所以函数 $f(x)$关于$(1,0)$对称，B 正确；

由 $f(2-x)=f(2+x)$得 $f(-x)=f(4+x)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$为偶函数，C 正确；

由 $f(x+2)+f(x)=0$ 得 $f(x+3)+f(1+x)=0$，

由 $f(2-x)=f(2+x)$得 $f(3-x)=f(1+x)$，

所以 $f(x+3)+f(3-x)=0$，函数 $f(x)$的图象关于$(3,0)$对称，D 错误. 故选 BC.

10. AD 【解析】因为 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}>1$，

所以直线 l 与圆 O 相离，A 正确；

当 $PO\perp l$，PA，PB 为切线时，$\angle APB$ 取到最大值，

此时$\angle APB=\frac{\pi}{2}$，故点 P 最多有 1 个，B 错误；

当 P 在 l 上运动时，$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$无最大值，C 不正确；

当 PA，PB 为切线时，设 $P(a,2-a)$，

则直线 AB 为 $ax+(2-a)y=1$，即 $a(x-y)+2y-1=0$，

所以直线 AB 过定点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，D 正确.

故选 AD.

11. ABD 【解析】由题得$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，

又 $2\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $0<\varphi<2\pi$，所以 $\varphi=\frac{4\pi}{3}$，A 正确；

所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$，

当 $x\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{4\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $f(x)$单调递增，B 正确；

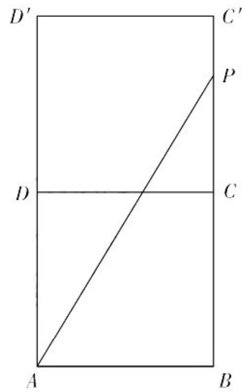
将 $y=\cos x$ 图象上各点横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$得 $y=\cos 2x$，再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，可得 $y=$

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，而 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 C 错误；

由 $4f(x)+\sqrt{2x+\frac{\pi}{3}}=0$，得 $4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2x+\frac{\pi}{3}}$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=t$，则 $4\sin t=\sqrt{t}$，

因为函数 $y=4\sin t$ 在 $t=0$ 处切线的斜率为 $y'|_{t=0}=4$，$y=\sqrt{t}$ 在 $(0,0)$ 处切线斜率不存在，即切线方程为 $t=0$，所以 $y=4\sin t$ 在 $t=0$ 处图象较缓，同时当 $t>16$ 时 $4\sin t<\sqrt{t}$，根据图象可以判断 $4\sin t=\sqrt{t}$ 有 7 个解，故 D 正确. 故选 ABD.

12. BCD 【解析】对于 A，将正方体的下面和侧面展开可得如右图形，



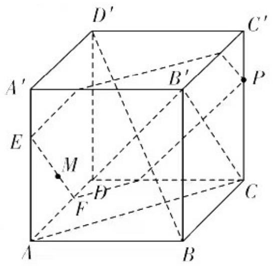
连接 AP，则 $AP=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{34}<2\sqrt{10}$，故 A 错误；

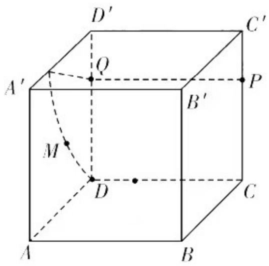
对于 B，平面 $ACB'\perp BD'$，

所以过点 P 做平面 PEF // 平面 ACB'，

所以 M 的运动轨迹为线段 EF，

所以 $|EF|=\frac{2}{3}|A'D|=2\sqrt{2}$，故 B 正确；





对于 C，若 $|PM|=\sqrt{13}$，则 M 在以 P 为球心，$\sqrt{13}$ 为半径的球面上，

过点 P 作 $PQ\perp$ 平面 $ADD'A'$，此时 $|QM|=\sqrt{PM^2-PQ^2}=2$，

所以点 M 在以 Q 为圆心，2 为半径的圆弧上，此时圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$，

点 M 的运动轨迹长度为 $\frac{2}{3}\pi\times 2=\frac{4}{3}\pi$，故 C 正确；

对于 D，以 D 为坐标原点，DA,DC,DD' 所在直线分别为 x,y,z 轴建系，

则 $M(0,0,3)$，$P(0,3,2)$，$B'(3,3,3)$，$A(3,0,0)$，设三棱锥 B'-MAP 的外接球球心为 $N(x,y,z)$，

由 $|NM|^2=|NP|^2=|NB'|^2=|NA|^2$ 得，

$x^2+y^2+(z-3)^2=x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=(x-3)^2+y^2+z^2$，

解得：$x=z=\frac{7}{4}$，$y=\frac{5}{4}$，

所以三棱锥 B'-MAP 的外接球半径 $R=\sqrt{\left(\frac{7}{4}-3\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{4}$，

所以三棱锥 B'-MAP 的外接球表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{99}{4}\pi$，D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -84 【解析】由 $C_n^2=C_n^7$，可得 $n=9$，

因此 $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}(-1)^r x^{-2r}=(-1)^r C_9^r x^{9-3r}$，

故 $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式中的常数项为 $T_4=(-1)^3C_9^3=-84$.

14. 2^n-n+1 【解析】设数列 $\{b_n\}$ 为原数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列，$\{c_n\}$ 为原数列 $\{a_n\}$ 的二阶差数列.

则由题意可知 $b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=7$，$c_1=2$，$c_2=4$.

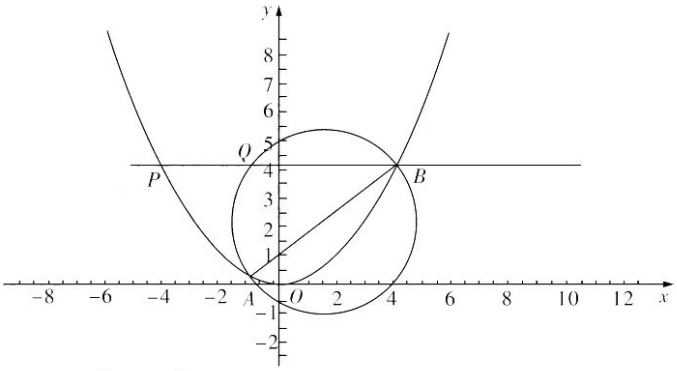
又 $\{c_n\}$ 为等比数列，故 $c_n=2^n$，即 $b_{n+1}-b_n=2^n$.

因此 $b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1+1=2^n-1$，

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_1+a_1$

$=(2^{n-1}-1)+(2^{n-2}-1)+\cdots+(2^1-1)+2=2^n-n+1$.

15. $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ 【解析】如图，易知过点 A,B 且与直线 l 相切的圆就是以 AB 为直径的圆，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



则 $Q(x_1,y_2),P(-x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{QB}=3\overrightarrow{PQ}$ 有 $x_2=-2x_1$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，代入 $x^2=4y$ 有 $x^2-4kx-4=0$，

所以 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$，结合 $x_2=-2x_1$，得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

16. e^2 【解析】因为 $a>0$，

所以 $e^x\geqslant a\ln\frac{a(x-1)}{e}\Leftrightarrow\frac{e^x}{a}\geqslant\ln a+\ln(x-1)-1$

$\Leftrightarrow e^{x-\ln a}-\ln a\geqslant\ln(x-1)-1\Leftrightarrow e^{x-\ln a}+(x-\ln a)\geqslant(x-1)+\ln(x-1)$.

令 $f(x)=e^x+x$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(x-\ln a)=e^{x-\ln a}+(x-\ln a)\geqslant(x-1)+\ln(x-1)=f(\ln(x-1))$，

所以 $x-\ln a\geqslant\ln(x-1)$，即 $x-\ln(x-1)\geqslant\ln a$.

令 $g(x)=x-\ln(x-1)$，$g'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$，

故 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，因此 $g(x)_{\min}=g(2)=2$.

因为不等式 $e^x\geqslant a\ln\frac{a(x-1)}{e}(a>0)$ 恒成立，所以 $\ln a\leqslant 2$，即 $a\leqslant e^2$.

故实数 a 的最大值为 e^2.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【解析】(1) 由 $2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b+c}{a}$，有 $\sqrt{3}\sin C+\cos C=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$， ………… 2 分

即 $\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C=\sin B+\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A+\sin C$，即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$， ………… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 5 分

(2)**解法一**：设 $\angle BAD=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，则 $\angle ADC=2\theta$，$\angle DAC=\frac{\pi}{3}-\theta$，$\angle ACD=\frac{2\pi}{3}-\theta$，

在三角形 ADC 中，由正弦定理知，$\frac{AD}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{DC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$， ………… 7 分

即 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$，

化简得，$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\theta=\frac{\pi}{6}$，$\angle ACD=\frac{2\pi}{3}-\theta=\frac{\pi}{2}$， ………… 9 分

即 $\sin C=1$. ………… 10 分

解法二：取 AB 中点 M，延长 MD 与 AC 的延长线交于点 N，连接 NB，

由 $2CD=BD$ 有 $\overrightarrow{ND}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$，由 $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}$，

设$\overrightarrow{ND}=\lambda\overrightarrow{NM}$，则$\frac{1}{3}\overrightarrow{NB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{NB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{NA}$，即$\frac{2-3\lambda}{6}\overrightarrow{NB}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{NA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$，…………………………… 7 分

故$\lambda=\frac{2}{3}$，所以$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$，即 C 为 AN 中点.

又 $AD=BD$，M 为 AB 中点，所以 $NM\perp AB$，

又 $A=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABN$ 为正三角形，…………………………………………………………………… 9 分

又 BC 平分 AN，所以 $\sin C=1$. ……………………………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)由$\frac{S_n}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=-\frac{1}{2}$有$\frac{S_{n+1}-a_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=-\frac{1}{2}$，即$\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{2}$，…………………………………… 2 分

又 $a_1=1$，故$\frac{S_1}{a_1}=1$，

所以数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{n+1}{2}$，即 $S_n=\frac{n+1}{2}a_n$， ……………………………………………………………………… 4 分

故 $S_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}$，两式相减得 $a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}-\frac{n+1}{2}a_n$，即$\frac{n}{2}a_{n+1}=\frac{n+1}{2}a_n$，

所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\cdots=\frac{a_1}{1}=1$，

因此$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)及 $b_n=2^{a_n}$，有 $b_n=2^n$，所以 $T_{2n-1}=2^{2n}-2=4^n-2$，…………………………………………… 8 分

又 $4^n=(3+1)^n=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}3^1+1$，

因为 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^{n-1}$ 均为正整数，所以存在正整数 k 使得 $4^n=3k+1$，……………………………… 10 分

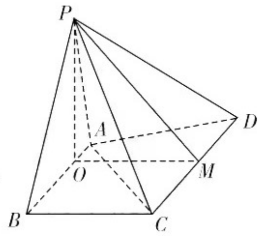
故 $T_{2n-1}=2^{2n}-2=4^n-2=3k-1$，

所以 T_{2n-1}除以 3 的余数为 2. ……………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)取 CD 中点 M，AB 靠近点 A 的三等分点 O，

因为底面 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB/\!/CD$，$AB\perp BC$，

易知 $AB\perp OM$，



因为 $PC=PD=\sqrt{22}$，

所以 $PM\perp CD$，所以 $AB\perp PM$，

因为 $OM\cap PM=M$，OM、$PM\subset$平面 POM，

所以 $AB\perp$平面 POM. …………………………………………………………………… 2 分

又 $PO\subset$平面 POM，所以 $AB\perp PO$，

由 $PD=\sqrt{22}$，$PA=\sqrt{10}$，$MD=2$，$OA=1$，

得 $PO=3$，$PM=3\sqrt{2}$，

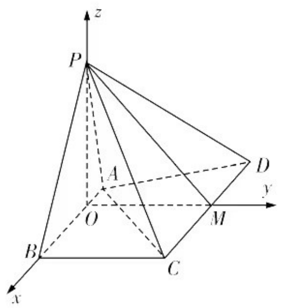
又 $OM=BC=3$，所以$\triangle POM$ 为等腰直角三角形，

所以 $PO\perp OM$， …………………………………………………………………………………………… 4 分

又 $PO\perp AB$，$OM\cap AB=O$，OM、$AB\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，

又 $PO\subset$平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$. ………………………………… 6 分



(2)由(1)可知，OB、OM、OP 三条直线两两互相垂直且交于点 O，

以 O 为坐标原点，OB、OM、OP 分别为 x、y、z 轴建立如图空间直角坐标系，

则 $A(-1,0,0)$，$C(2,3,0)$，$P(0,0,3)$，$D(-2,3,0)$，

故$\overrightarrow{AC}=(3,3,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,3,-3)$，$\overrightarrow{DC}=(4,0,0)$， ……………………………… 8 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$有$\begin{cases}3x+3y=0,\\ 2x+3y-3z=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{m}=(-3,3,1)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}4x'=0,\\ 2x'+3y'-3z'=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$， …………………………………… 10 分

设平面 PAC 与平面 PCD 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{38}}{19}$，

故平面 PAC 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{38}}{19}$. …………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由图 1 知，“年轻人”占比为 45.5%+34.5%=80%，即有 200×80%=160(人)，“非年轻人”有 200−160=40(人)，

由图 2 知，“经常使用直播销售用户”占比为 30.1%+19.2%+10.7%=60%，即有 200×60%=120(人)，“不常使用直播销售用户”有 200−120=80(人).

“经常使用直播销售用户中的年轻人”有 $120\times\frac{5}{6}=100$(人)，“经常使用直播销售用户中的非年轻人”有 120−100=20(人)，

∴补全的列联表如下：

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户	100	20	120
不常使用直播销售用户	60	20	80
合计	160	40	200

…………… 2 分

零假设 H_0：经常使用网络直播销售与年龄相互独立，即经常使用网络直播销售与年龄无关.

于是 $a=100,b=20,c=60,d=20$.

∴$\chi^2=\frac{200\times(100\times20-60\times20)^2}{120\times80\times160\times40}=\frac{25}{12}\approx2.083<2.706$， …………………………………… 4 分

根据小概率 $\alpha=0.10$ 的独立性检验，我们推断 H_0 成立，

即认为经常使用网络直播销售与年龄无关. …………………………………… 5 分

(2)若按方案一，设获利 X_1 万元，则 X_1 可取的值为 300，−150，0，X_1 的分布列为：

X_1	300	−150	0
p	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

…………………… 6 分

$E(X_1)=300\times\frac{7}{10}+(-150)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=180$(万元)， …………………………………… 7 分

$D(X_1)=(300-180)^2\times\frac{7}{10}+(-150-180)^2\times\frac{1}{5}+(0-180)^2\times\frac{1}{10}=120^2\times\frac{7}{10}+330^2\times\frac{1}{5}+180^2\times\frac{1}{10}=35100$；

(或 $D(X_1)=300^2\times\frac{7}{10}+(-150)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{1}{10}-180^2=35100$) …………………………………… 8 分

若按方案二，设获利 X_2 万元，则 X_2 可取的值为 500，−300，0，X_2 的分布列为：

X_2	500	−300	0
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

…………………………… 9 分

$E(X_2)=500\times\frac{1}{2}+(-300)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{3}{10}=190$(万元)， …………………………………… 10 分

$D(X_2)=(500-190)^2\times\frac{1}{2}+(-300-190)^2\times\frac{1}{5}+(0-190)^2\times\frac{3}{10}=310^2\times\frac{1}{2}+490^2\times\frac{1}{5}+190^2\times\frac{3}{10}=$ 106900.

(或 $D(X_2)=500^2\times\frac{1}{2}+(-300)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{3}{10}-190^2=106900$)…………………………………… 11 分

$\because E(X_1)<E(X_2), D(X_1)<D(X_2)$,

①方案一与方案二的利润均值差异不大，但方案二的方差要比方案一的方差大得多，从稳定性方面看方案一线下销售更稳妥，故选方案一.

②方案一的利润均值低于方案二，选择方案二.（两种说法皆可给分） ………………………………… 12分

21.【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c，由椭圆 W 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$得 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$， ……………………………… 1分

设点 $T(m,n)$为椭圆上一点，则$\frac{m^2}{2b^2}+\frac{n^2}{b^2}=1, -b\leqslant n\leqslant b$,

因为 $P(0,2)$，所以$|TP|=\sqrt{m^2+(n-2)^2}=\sqrt{2b^2-2n^2+n^2-4n+4}=\sqrt{-(n+2)^2+8+2b^2}$， ………… 2分

当 $0<b<2$ 时，$|TP|_{\max}=\sqrt{-(-b+2)^2+8+2b^2}=4$，解得 $b=2$(舍去)； ……………………………… 3分

当 $b\geqslant 2$ 时，$|TP|_{\max}=\sqrt{8+2b^2}=4$，解得 $b=2$，所以 $a=2\sqrt{2}$， ……………………………………… 4分

故椭圆 W 的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………… 5分

(2)①当 CD 斜率不存在时，设 $C(x_0,y_0)$，$-2\sqrt{2}<x_0<2\sqrt{2}$ 且 $x_0\neq 0$，则 $D(x_0,-y_0)$.

$\therefore$直线 CP 为 $y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$，令 $x=4$ 得 $B\left(4,\frac{4y_0-8}{x_0}+2\right)$,

同理可得 $B_1\left(4,\frac{-4y_0-8}{x_0}+2\right)$.

$\because B$ 与 B_1 关于 x 轴对称，

$\therefore \frac{4y_0-8}{x_0}+2+\frac{-4y_0-8}{x_0}+2=0$.

解得 $x_0=4$，矛盾； ……………………………………………………………………………… 7分

②当直线 CD 的斜率存在时，设直线 CD 的方程为 $y=kx+m$,

设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq 0$ 且 $x_2\neq 0$，则 $m\neq 2$.

联立方程组$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$消去 y，化简可得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-8)=8(8k^2+4-m^2)>0$，则 $m^2<8k^2+4$,

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}, x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2}$， ……………………………………………… 9分

又 $P(0,2)$，所以 $k_{PC}=\frac{y_1-2}{x_1}, k_{PD}=\frac{y_2-2}{x_2}$,

所以直线 PC 的方程为 $y=\frac{y_1-2}{x_1}x+2$，直线 PD 的方程为 $y=\frac{y_2-2}{x_2}x+2$,

令 $x=4$ 得 $y_B=\frac{4y_1-8}{x_1}+2, y_{B_1}=\frac{4y_2-8}{x_2}+2$,

因为 B_1 和 B 关于 x 轴对称，所以 $y_B+y_{B_1}=0$，即$\frac{4y_1-8}{x_1}+\frac{4y_2-8}{x_2}=-4$,

又 $y_1=kx_1+m, y_2=kx_2+m$ 代入上式，整理可得$(4+8k)x_1x_2+(4m-8)(x_1+x_2)=0$,

即$\frac{8(m^2+4km-8k-4)}{2k^2+1}=0$，化简可得 $m=-4k-2$ 或 $m=2$(舍去)， ……………………………… 11分

所以，直线 CD 的方程为 $y=kx-4k-2$，即 $y+2=k(x-4)$,

所以，直线 CD 过定点$(4,-2)$. ……………………………………………………………… 12分

22.【解析】(1)易知函数 $f(x)$的定义域为$(a,+\infty)$,

又 $f'(x)=x-1-\frac{a}{x-a}=\frac{x(x-1-a)}{x-a}$， ……………………………………………………………… 1分

当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(a,a+1)$上单调递减，在$(a+1,+\infty)$上单调递增；

当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$在$(0,a+1)$上单调递减，在$(a,0)$和$(a+1,+\infty)$上单调递增；

当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(a+1,0)$ 上单调递减，在 $(a,a+1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 5 分

(2) 由 $g(x)=f(x+a)-a\left(x+\frac{1}{2}a-1\right)=\frac{1}{2}x^2-x-a\ln x,x>0$，

有 $g'(x)=x-1-\frac{a}{x}=\frac{x^2-x-a}{x}$，由题意可知 x_1,x_2 是方程 $x^2-x-a=0$ 的两根，

因此 $x_1+x_2=1,x_1x_2=-a$，且 $-\frac{1}{4}<a<0,0<x_1<\frac{1}{2}<x_2<1$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2-x_1-a\ln(x_1-a)-\frac{1}{2}x_2^2+x_2+a\ln(x_2-a)$

$=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2)-a\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(x_1-x_2)-a\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}$

$=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)-a\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}$. ……………………………………………………………… 7 分

(i) 先证：$f(x_1)-f(x_2)>0$.

证法一：

要证明 $f(x_1)-f(x_2)>0$，只需证明 $-\frac{1}{2}(x_1-x_2)-a\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}>0$，

又 $\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}=\ln\frac{-\frac{a}{x_2}-a}{-\frac{a}{x_1}-a}=\ln\frac{\frac{1}{x_2}+1}{\frac{1}{x_1}+1}=\ln\left(\frac{1}{x_2}+1\right)-\ln\left(\frac{1}{x_1}+1\right)$，

故只需证明 $\ln\left(\frac{1}{x_2}+1\right)-\ln\left(\frac{1}{x_1}+1\right)>\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{x_2}+1\right)-\left(\frac{1}{x_1}+1\right)\right]$，

即证 $2\ln\left(\frac{1}{x_2}+1\right)-\left(\frac{1}{x_2}+1\right)>2\ln\left(\frac{1}{x_1}+1\right)-\left(\frac{1}{x_1}+1\right)$，

因为 $0<x_1<x_2<1$，故 $1<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$，所以 $2<\frac{1}{x_2}+1<\frac{1}{x_1}+1$，

令 $h(x)=2\ln x-x,h'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}>0$，故 $h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h\left(\frac{1}{x_2}+1\right)>h\left(\frac{1}{x_1}+1\right)$，即 $2\ln\left(\frac{1}{x_2}+1\right)-\left(\frac{1}{x_2}+1\right)>2\ln\left(\frac{1}{x_1}+1\right)-\left(\frac{1}{x_1}+1\right)$，

证毕. …………………………………………………………………………………………………… 10 分

证法二：

由(1)可知，$f(x)$ 在 $(0,a+1)$ 上单调递减，

要证 $f(x_1)-f(x_2)>0$，只需证明 $0<x_1<x_2<a+1$，

因为 $a+1-x_2=-x_1x_2+x_1=x_1(1-x_2)=x_1^2>0$，所以 $x_2<a+1$，

故 $0<x_1<x_2<a+1$，证毕. …………………………………………………………………………… 10 分

(ii) 再证：$f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{2}$.

要证 $f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{2}$，即证 $-\frac{1}{2}(x_1-x_2)-a\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}<\frac{1}{2}$，

又 $\ln\frac{x_1-a}{x_2-a}=\ln\frac{x_1+x_1x_2}{x_2+x_1x_2}=\ln\frac{x_1(x_1+x_2)+x_1x_2}{x_2(x_1+x_2)+x_1x_2}=\ln\frac{x_1^2+2x_1x_2}{2x_1x_2+x_2^2}$，

故只需证明 $x_1x_2\cdot\ln\frac{x_1^2+2x_1x_2}{2x_1x_2+x_2^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)=x_1$，

即证 $\ln\frac{x_1^2+2x_1x_2}{2x_1x_2+x_2^2}<\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2}=1+\frac{x_1}{x_2}$，

因为 $x_1^2+2x_1x_2<2x_1x_2+x_2^2$，所以 $\ln\frac{x_1^2+2x_1x_2}{2x_1x_2+x_2^2}<\ln 1=0<1+\frac{x_1}{x_2}$.

综上，$0<f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………… 12 分